Lezione 9

martedì 21 marzo 2017 08:43

I FORMULA DELLA LUNGHEZZA

$[0,L] \subset \mathbb{R}$ intervallo

$$\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = L\} \qquad k \in \mathbb{N}$$

suddivisione di $[0,L]$

$$\mathcal{S}([0,L]) = \{\text{insieme di tutte le suddivisioni } \sigma \text{ dell'inter. } [0,L]\}$$

DEF La lunghezza di una curva $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ è per def. :

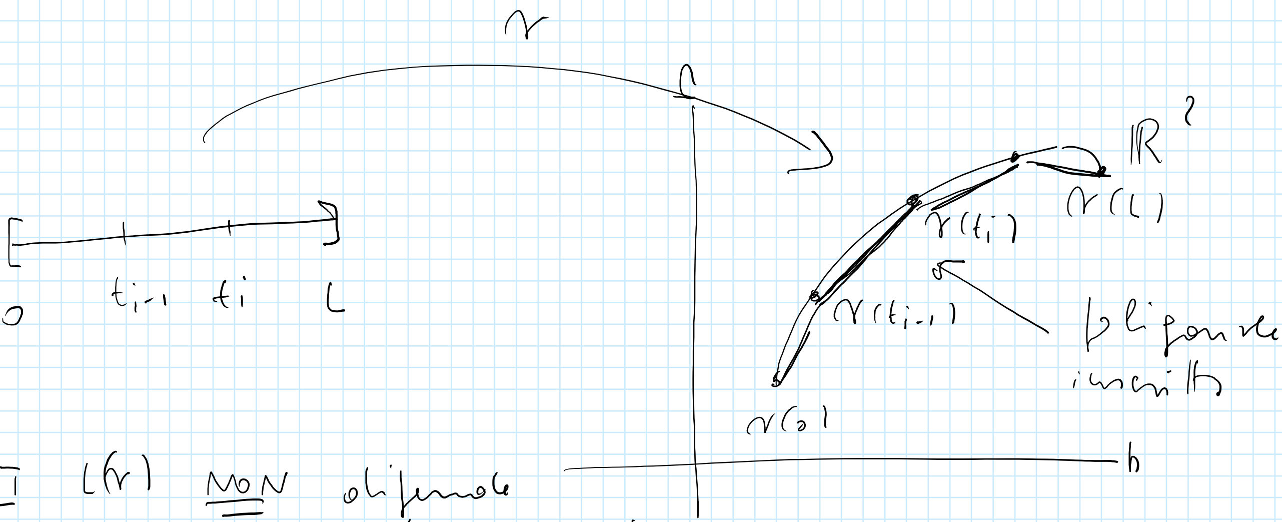
$$L(\gamma) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \ : \ \sigma \in \mathcal{S}([0,L]) \right\}$$

$t_i \in \sigma$

In generale si ha $L(\gamma) \in [0, \infty]$.

Diremo che la curva è rettificabile se

$$L(\gamma) < \infty .$$



ATT $L(\gamma)$ NON dipende dalla parametrizzazione.

OSSERVAZIONI

• Data $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ continua definiamo

$$\int_0^1 f(t)\,dt := \left(\int_0^1 f_1(t)\,dt, \ \dots, \ \int_0^1 f_n(t)\,dt\right).$$

• Vale la seguente proprietà:

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt .$$

TEOR. Sia $\gamma\in C^1([0,L];\mathbb{R}^n)$ una curva di classe C^1. Allora γ è rettificabile e inoltre

$$\boxed{L(\gamma) = \int_0^L |\dot\gamma(t)|\,dt}$$

DIM. Per semplicità $L=1$.

Prendiamo una generica suddiv. $\sigma\in\mathcal{S}([0,1])$.

$$\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$$

lunghezza polig. inscritta

$$\xrightarrow[t_i\in\sigma]{} \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t)|\,dt = \left(\int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt\right) < \infty$$

$$= \sum_{i=1} \int_{t_{i-1}} \qquad < \infty$$

Quindi prendo il sup su tutte le $\sigma \in \mathcal{S}([0,1])$ trovo:

$$L(\gamma) \leq \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt.$$

$\geq$

Voglio provare che vale .

Fisso un parametro $\varepsilon > 0$.
Uso il fatto che le funz. cont. su $[0,1]$ sono uniformemente continue.
Precisamente:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che:

$$\left.\begin{array}{l} t,s \in [0,1] \\ |t-s| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon.$$

ORA prendo una suddivisione $\sigma \in \mathcal{S}([0,1])$ tale che $\sigma = \{0 = t_0 < \dots < t_k = 1\}$

$$|t_i - t_{i-1}| < \delta.$$

Conti:

$$\int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\underbrace{\gamma'(t) - \gamma'(t_{i-1})} + \gamma'(t_{i-1})|\, dt \leq$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_{i-1})|}_{\le \varepsilon \text{ per la Unif Cont.}} \, dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t_{i-1})| \, dt$$

$$\le \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{>0} |\dot\gamma(t_{i-1})|$$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left| (t_i - t_{i-1}) \dot\gamma(t_{i-1}) \right|$$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t_{i-1}) \, dt \right|$$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\dot\gamma(t_{i-1}) - \dot\gamma(t) + \dot\gamma(t) \right) dt \right|$$

$$\le \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\left| \dot\gamma(t_{i-1}) - \dot\gamma(t) \right|}_{\le \varepsilon} dt + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t) \, dt \right|$$

k

$$\le 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

Conclusione:

lunghezza della poligonale inscritta in γ $\geq \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt - 2\varepsilon$

Al sup su tutte le δ ho

$$L(\gamma) \geq \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt - 2\varepsilon$$

ORA con $\varepsilon \to 0^+$ ho

$$L(\gamma) \geq \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt$$

$\square$

OSSERVAZIONI con $f \in C^1([a,b])$.

- Se $\gamma(t) = (t, f(t))$ $t \in [a,b]$ è una curva piana data in forma di grafico cartesiano, allora:

$$\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t))$$

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

Dunque

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt}$$

- Sia γ una curva piana data dalla equazione polare $\rho = \rho(\vartheta)$ $\vartheta \in [\alpha, \beta)$.

Preliminarmente

$$\gamma(\vartheta) = (\rho(\vartheta)\cos\vartheta, \rho(\vartheta)\sin\vartheta)$$

$\vartheta \in [\alpha, \beta]$

$\rho \in C^1([\alpha, \beta])$

Conti:

con $\rho \geq 0$.

$$\dot{\gamma}(\vartheta) = (\rho' \cos\vartheta - \rho \sin\vartheta, \rho' \sin\vartheta + \rho\cos\vartheta)$$

Poi

$$|\dot{\gamma}(\vartheta)| = \sqrt{(\rho'\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta)^2 + (\rho'\sin\vartheta + \rho\cos\vartheta)^2}$$

$$= \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}$$

Dunque per la formula della lunghezza si ha:

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)}\, d\theta$$

$$\gamma \iff \rho = \rho(\theta).$$

ESERCIZIO 1 Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva piana seguente

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{2t^3}{3} - t^2 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stabilire se γ è semplice e se è regolare. Calcolare quando possibile il campo unitario tangente T. Calcolare i limiti destro e sinistro

$$\lim_{t \to 0^{\pm}} T(t).$$

Disegnare il supporto di γ.

Soluzione

- γ semplice $\iff$ γ iniettiva ?

Prendo $s, t \in \mathbb{R}$ e suppongo che sia $\gamma(s) = \gamma(t)$. Cerco di provare che deve essere $s = t$.

$$\gamma(s) = \gamma(t) \iff \begin{cases} s^2 = t^2 \\ \dfrac{2s^3}{3} - s^2 = \dfrac{2t^3}{3} - t^2 \end{cases}$$

$$\frac{\;}{3} - s^{\,} = \frac{\;}{3} - t^{\,}$$

$$\begin{cases} s^2 = t^2 \\ s^3 = t^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} s^2 = t^2 \\ s = t \end{cases}$$

Dunque γ è iniettiva.

- Studio la regolarità

γ regol. in $t \iff |\dot\gamma(t)| \neq 0$

Conti

$$\dot\gamma(t) = (2t,\, 2t^2 - 2t) \qquad t \in \mathbb{R}^2$$

$$\dot\gamma(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 2t = 0 \\ 2t^2 - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff t = 0$$

Dunque $t = 0$ è l'unico istante dove γ <u>NON</u> è regolare.

- $\forall t \neq 0$ posso calcolare

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}$$

$$= \frac{(2t,\ 2t^2 - 2t)}{\sqrt{\underline{\underline{4t^2}} + (2t^2 - 2t)^{2}}}$$

$$= \frac{2t \cdot (1,\ t-1)}{\sqrt{4t^2}\sqrt{(1 + (t-1)^2)}}$$

$$= \frac{\cancel{2}t\ (1,\ t-1)}{\cancel{2}|t|\sqrt{1+(t-1)^2}}$$

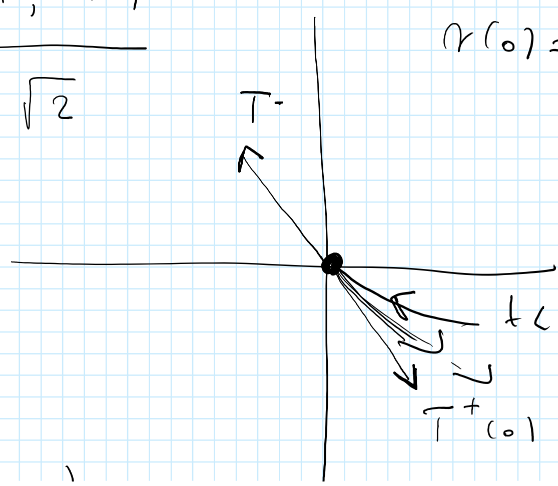
Limiti:

$$\lim_{t \to 0^+} T(t) = \lim_{t \to 0} \frac{(1,\ t-1)}{\sqrt{1+(t-1)^2}}$$

$$= \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$

$t = 0$

$r(0) = 0$



$T^{+}(0)$

$$\lim_{t \to 0^-} T(t) = -\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = T^{-}$$