Analisi Matematica 2 Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 10/7/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(La serie parte da $n = 1$ e non da $n = 0$.)

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) Precisare se la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$; iii) CU su $\mathbb{R}$ si/no:

Esercizio 2 (9 punti) Sia $\gamma : [\pi/2, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \left[\log\left(1 + \frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha}, \qquad \vartheta \geq \frac{\pi}{2},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro.

i) Disegnare (in modo approssimativo) il supporto della curva.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che γ sia rettificabile.

Risposte: ii) γ rettificabile per $\alpha \in$; i) Disegno:

Esercizio 3 (12 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = x + y - \sqrt{2}\log(1 + x^2 + y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

ii) Verificare che f ristretta all'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è una funzione concava.

iii) Provare che f assume valore minimo e massimo su K.

iv) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risp.: i) p.ti critici: ; ii) Hessiana $H_f =$; iv) val. min= val. max=

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola: — Scritto del 10/7/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-x}}{x^2+3^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(La serie parte da $n=1$ e non da $n=0$.)

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) Precisare se la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$; iii) CU su $\mathbb{R}$ si/no:

Esercizio 2 (9 punti) Sia $\gamma : [\pi/2, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

$$\varrho = \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{1/\alpha}, \qquad \vartheta \geq \frac{\pi}{2},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro.

i) Disegnare (in modo approssimativo) il supporto della curva.

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che γ sia rettificabile.

Risposte: ii) γ rettificabile per $\alpha \in$; i) Disegno:

Esercizio 3 (12 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{2}\log(1+x^2+y^2) - x + y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

ii) Verificare che f ristretta all'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ è una funzione convessa.

iii) Provare che f assume valore minimo e massimo su K.

iv) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risp.: i) p.ti critici: ; ii) Hessiana $H_f =$; iv) val. min= val. max=

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza semplice della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. Studiamo direttamente la convergenza uniforme. Sia $M \in \mathbb{R}$ un parametro.
Allora

$$\sup_{x \leq M} \frac{n^x}{2^n + x^2} \leq \sup_{x \leq M} \frac{n^x}{2^n} = \frac{n^M}{2^n},$$

essendo $x \longmapsto n^x$ crescente. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^M}{2^n} < \infty$$

converge per il criterio della radice (o del rapporto).
Infatti

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^M}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^M}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Per il Criterio di Weierstrass la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2}$$

converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $(-\infty, M]$ con $M \in \mathbb{R}$ arbitrariamente grande.

Non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.
Infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n+x^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n^x}{2^n+x^2} =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n + x^2} \geq \frac{(N+1)^x}{2^{N+1} + x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty .$$

Risposte:

i) convergenza semplice $\forall x \in \mathbb{R}$

ii) convergenza uniforme: su ogni $(-\infty, M]$ $\forall M \in \mathbb{R}$.

$\square$

ESERCIZIO   Sia $\gamma : [\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare

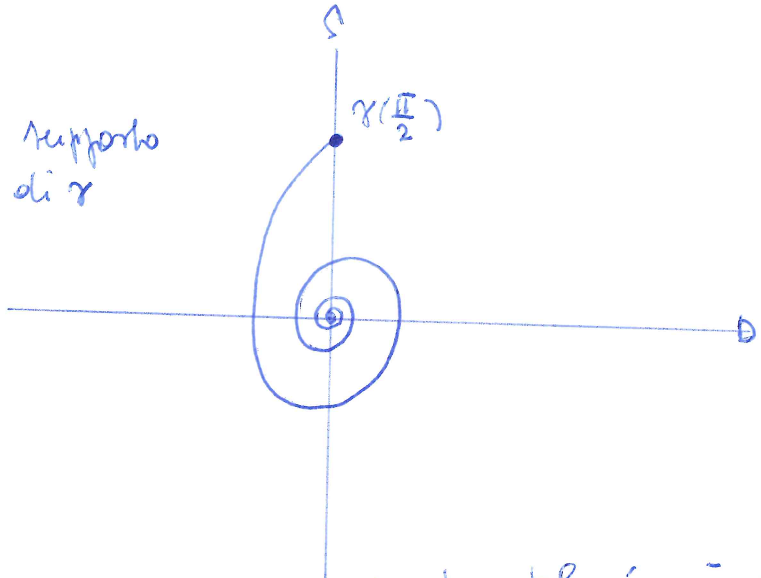
$$\rho = \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha}, \quad \vartheta \geq \frac{\pi}{2},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro.

i) Disegnare (in modo approssimativo) il sostegno di γ

ii) Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che γ sia rettificabile.

Risoluzione. i) La funzione $\vartheta \longrightarrow \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha} = \rho(\vartheta)$ è decrescente, essendo $\frac{1}{\vartheta}$ decrescente e il logaritmo crescente (ed $\alpha > 0$). Inoltre $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) = \left[\log\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\right]^{\alpha}(0,1)$. È una spirale che gira in senso antiorario:



ii) La lunghezza in coordinate polari è data dalla formula

$$L(\gamma) = \int_{\pi/2}^{\infty} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\vartheta.$$

La derivata di ρ è:

$$\dot\rho = \alpha \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{1}{1+\frac{1}{\vartheta}} \left(-\frac{1}{\vartheta^2}\right)$$

Quindi

$$\sqrt{\rho^2+\dot\rho^2} = \left(\left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{2\alpha} + \alpha^2 \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{2\alpha-2} \frac{1}{\vartheta^2(1+\vartheta)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{\alpha-1} \left(\left[\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right)\right]^{2} + \frac{\alpha^2}{\vartheta^2(1+\vartheta)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ora usiamo l'approssimazione per $\vartheta \to \infty$

$$\log\left(1+\frac{1}{\vartheta}\right) = \frac{1}{\vartheta}(1+o(1)) \qquad \text{con } o(1) \underset{\vartheta\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si trova:

$$\sqrt{\rho^2+\dot\rho^2} = \frac{1}{\vartheta^{\alpha-1}}(1+o(1)) \left(\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{\alpha^2}{\vartheta^2(1+\vartheta)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\vartheta^{\alpha}}(1+o(1)) \qquad \text{con } o(1) \underset{\vartheta\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Per il criterio del confronto asintotico per integrali impropri:

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \sqrt{\rho^2+\dot\rho^2}\, d\vartheta < \infty \iff \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{\vartheta^\alpha}\, d\vartheta < \infty \iff \alpha > 1.$$

RISPOSTA: γ rettificabile $\iff \alpha > 1$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + y - \sqrt{2}\,\log(1+x^2+y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Calcolare tutti i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

ii) Verificare che f ristretta all'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ è una funzione concava.

iii) Provare che f assume valore massimo e minimo su K.

iv) Calcolare i valori massimo e minimo di f su K.

Risoluzione. i) Le derivate parziali di f sono

$$f_x = 1 - \sqrt{2}\,\frac{2x}{1+x^2+y^2},$$

$$f_y = 1 - \sqrt{2}\,\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$.

Sottraendo le due equazioni si trova

$$\frac{2\sqrt{2}\,(x-y)}{1+x^2+y^2} = 0 \iff x = y.$$

Sostituendo $y = x$ in una delle due equazioni si ottiene

$$1-2\sqrt{2}\,\frac{x}{1+2x^2}=0 \iff 2x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0$$

$$\iff (\sqrt{2}\,x-1)^2=0$$

$$\iff x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dunque c'è un unico punto critico; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Osserviamo che si trova sulla circonferenza $x^2+y^2=1$.

ii) Calcoliamo la matrice Hessiana di f:

$$f_{xx}=-2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2+y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$=-2\sqrt{2}\,\frac{1+y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}=-2\sqrt{2}\,\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy}=-2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2+y^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$=-2\sqrt{2}\,\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yx}=f_{xy}$$

Dunque

$$tr\left(Hf(x,y)\right) = f_{xx} + f_{yy} = \frac{-4\sqrt{2}}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\det\left(Hf(x,y)\right) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 =$$

$$= 8\,\frac{1-(x^2-y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4} - 32\,\frac{x^2 y^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{8}{(1+x^2+y^2)^4}\left[1 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 4x^2y^2\right]$$

$$= \frac{8}{(1+x^2+y^2)^4}\left[1 - (x^4+2x^2y^2+y^4)\right]$$

$$= 8\,\frac{1-(x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

Dunque: $tr\left(Hf(x,y)\right) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\det\left(Hf(x,y)\right) \geq 0 \iff (x,y) \in K$

Dunque f è concava in K.

iii) K è chiuso e limitato e dunque è compatto (Heine-Borel). f è continua su K e dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo su K.

iv) Dal punto i) sappiamo che f non ha punti critici interni a K. Deduciamo che f deve assumere il minimo e il massimo sulla frontiera.

La restrizione di f su ∂K è:

$$\phi(\vartheta) = f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \cos\vartheta + \sin\vartheta - \sqrt{2}\log 2$$

con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. La sua derivata è

$$\phi'(\vartheta) = -\sin\vartheta + \cos\vartheta$$

si annulla se e solo se $\operatorname{tg}\vartheta = 1 \iff \vartheta = \frac{\pi}{4}$ o $\vartheta = \frac{5}{4}\vartheta$.

Ora si ha

$$\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\log 2 = \sqrt{2}\,(1-\log 2)$$

$$\phi\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\log 2 = -\sqrt{2}\,(1+\log 2)$$

Risposte:

Valore max di f su K è: $\sqrt{2}\,(1-\log 2)$ assunto in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Valore min di f su K: $-\sqrt{2}\,(1+\log 2)$ assunto in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\square$