Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/9/2017 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Sia $\alpha > 0$ in parametro e si consideri l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{\pi/2 - \arcsin x}{\sin^2 x} \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^\alpha dx.$$

i) Calcolare preliminarmente il valore di $\beta > 0$ tale che il seguente limite esista finito e diverso da zero:

$$L = \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi/2 - \arcsin x}{(1-x)^\beta}.$$

ii) Determinare tutti i valori di $\alpha > 0$ tali che l'integrale dato converga.

Risposte: i) $\beta =$; ii) $\alpha \in$

Esercizio 2 (11 punti) Si consideri il sottoinsieme del piano

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y^4 \;\text{ e }\; \sqrt[3]{x} > |y|\big\}.$$

i) Provare che A è aperto e non vuoto.

ii) Disegnare A.

iii) Stabilire se $\bar{A}$ è compatto.

iv) Descrivere la frontiera di A.

Risposte: iii) $\bar{A}$ compatto Si/No ; iv) $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$ ... $\}$;

Esercizio 3 (10 punti) Dato un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^x(y^2 + \gamma x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Al variare di γ, calcolare i punti critici di f.

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di massimo/minimo locale/assoluto.

Risp.: i) Punti critici: ; ii) $Hf(x, y) =$; iii) Max/min loc/ass:

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Calcolare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che converga il seguente integrale improprio:

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sin^2 x} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha dx .$$

Soluzione. La funzione integranda può avere asintoti verticali sia in $x=0$ che in $x=1$.
Studiamo separatamente

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sin^2 x} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha dx$$

$$I_2 = \int_{1/2}^{1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sin^2 x} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha dx .$$

Per il Criterio del Confronto Asintotico:

$$I_1 < \infty \iff \int_0^{1/2} \frac{x^\alpha}{\sin^2 x} dx < \infty$$

$\sin x = x + o(x)$
$x \to 0$

$$\iff \int_0^{1/2} \frac{x^\alpha}{x^2} dx < \infty$$

$$\iff 2 - \alpha < 1 \iff \boxed{\alpha > 1} .$$

Passiamo ad I_2. Per confronto Asintotico

$$I_2 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{1/2}^{1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(1-x)^{\alpha}}\, dx < \infty$$

Cerco $\beta \in \mathbb{R}$ tale che esista finito $\neq 0$ il limite

$$0 \neq L = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(1-x)^{\beta}}$$

Hôspital

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\beta (1-x)^{\beta - 1} \sqrt{1-x^2}}$$

devo scegliere $\beta = 1/2$

$$= \lim_{x \to 1^-} 2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{2} \neq 0$$

Quindi per Confronto Asintotico:

$$I_2 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{1/2}^{1} \frac{(1-x)^{1/2}}{(1-x)^{\alpha}}\, dx < \infty$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha - \frac{1}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \frac{3}{2}.$$

Conclusione:

I converge $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri il sottoinsieme del piano

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 < y^4 \text{ e } \sqrt[3]{x} > |y| \}.$$

1) Provare che A è aperto.

2) Disegnare A.

3) Stabilire se $\overline{A}$ è compatto.

4) Descrivere la frontiera di A.

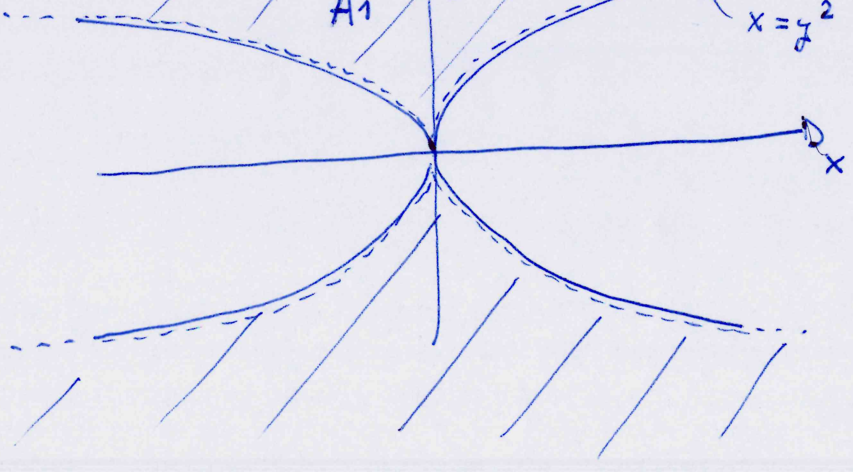
Risoluzione. 1) Le funzioni $f_1(x,y) = x^2 - y^4$ e $f_2(x,y) = \sqrt[3]{x} - |y|$ sono continue. Quindi gli insiemi

$$A_1 = f^{-1}(-\infty, 0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - y^4 < 0 \}$$

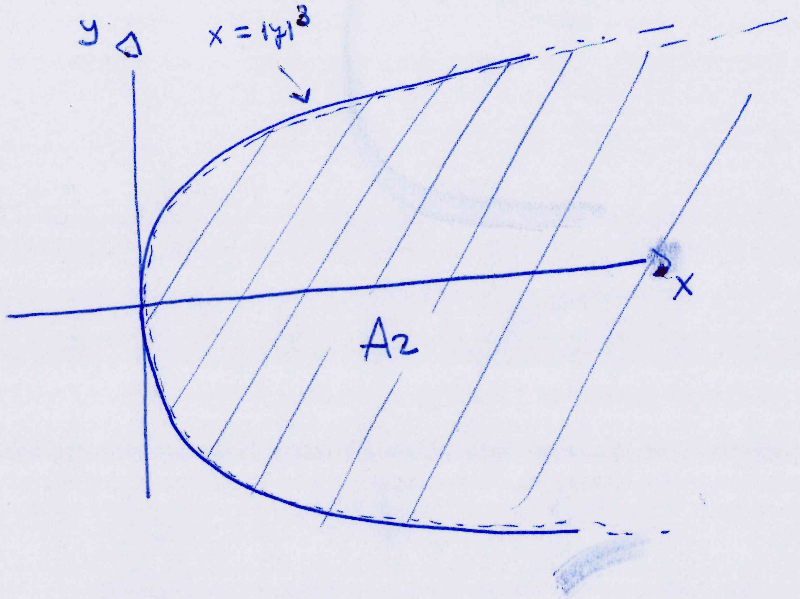
$$A_2 = f^{-1}(0, \infty) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \sqrt[3]{x} - |y| > 0 \}$$

sono aperti. Dunque $A = A_1 \cap A_2$ è aperto in quanto intersezione di aperti.

2) Disegno. L'insieme A_1 è descritto da $|x| < y^2$:

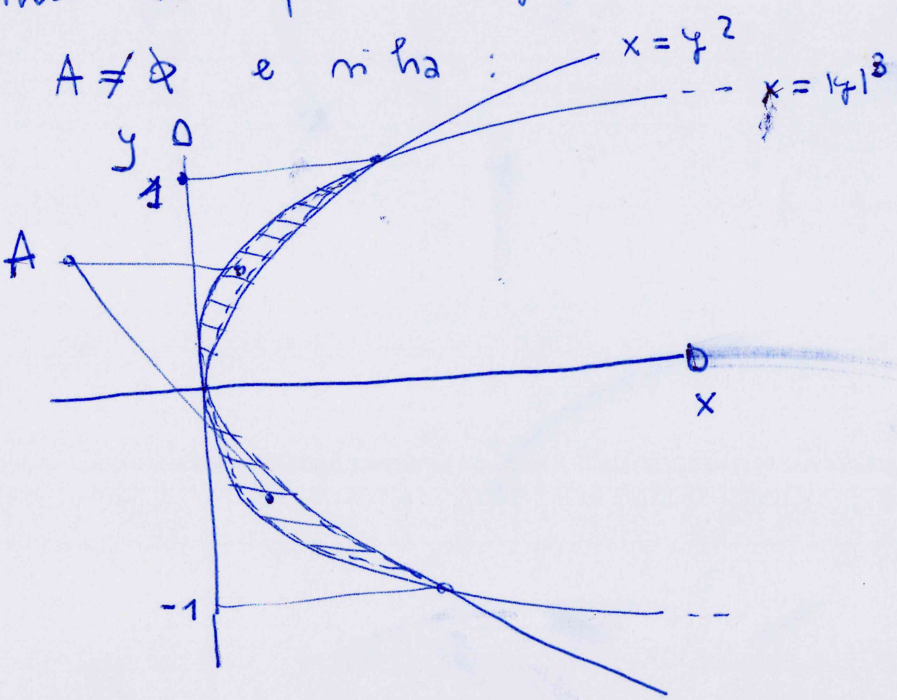


L'insieme A_2 è descritto da $x > |y|^3$. Quindi



Osserviamo che per $0 < |y| < 1$ si ha $|y|^3 < y^2$.

Dunque $A \neq \emptyset$ e si ha:



3) La chiusura $\bar{A}$ è chiusa. Inoltre $\bar{A}$ è limitato.

Se infatti $(x,y) \in A$:

$$|y| < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y^2} \implies |y|^3 < |y|^2 \implies |y| < 1$$

e inoltre $0 < x < y^2 < 1$. Quindi $\bar{A} \subset [0,1] \times [-1,1]$.

Per Heine - Borel l'insieme $\bar{A}$ è compatto.

4) La frontiera di A è l'insieme:

$$\partial A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = y^4 \ \text{e} \ \sqrt[3]{x} \geq |y| \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y^4 \ \text{e} \ \sqrt[3]{x} = |y| \right\}.$$

$\square$

ESERCIZIO Dato un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x (y^2 + \gamma x) \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Al variare di γ, calcolare i punti critici di f

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f.

iii) Stabilire se i punti critici trovati sono punti di massimo o di minimo locale / assoluto.

Risoluzione. i) Il gradiente di f è

$$f_x = e^x (y^2 + \gamma x) + \gamma e^x = e^x (y^2 + \gamma x + \gamma)$$

$$f_y = 2y e^x$$

Il sistema $f_x = f_y = 0$ fornisce $y = 0$ e poi

$$e^x (0 + \gamma x + \gamma) = 0 \iff \gamma (x+1) = 0.$$

Se $\gamma = 0$ l'ultima equazione è sempre verificata.

Se $\gamma \neq 0$ l'ultima equazione implica $x = -1$.

Dunque per $\gamma = 0$ c'è una retta di punti critici $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Per $\gamma \neq 0$ c'è il solo punto critico $(-1,0) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Le derivate seconde sono:

$$f_{xx} = e^x (y^2 + \gamma x + 2\gamma)$$

$$f_{xy} = 2y e^x$$

$$f_{yy} = 2 e^x$$

La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = e^x \begin{pmatrix} y^2+\gamma x+2\gamma & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$$

iii) Nel caso $\gamma = 0$ la funzione è $f(x,y) = y^2 e^x$.

I punti critici $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ sono tutti minimi assoluti.

Nel caso $\gamma \neq 0$ c'è il solo punto critico $(-1,0)$.

Abbiamo

$$Hf(-1,0) = e^{-1} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\operatorname{tr} Hf(-1,0) = e^{-1} (\gamma+2)$$

$$\det Hf(-1,0) = e^{-2}\, 2\gamma$$

Dunque $Hf(-1,0) > 0 \iff \det Hf(-1,0) > 0$ e $\operatorname{tr} Hf(-1,0) \geq 0$.

Le due condizioni forniscono:

$$\begin{cases} \gamma + 2 \geq 0 \\ \gamma > 0 \end{cases} \iff \gamma > 0.$$

Dunque per $\gamma > 0$ si ha $Hf(-1,0) > 0$, e quindi $(-1,0)$ è un p.to di minimo locale stretto.

È anche assoluto in quanto

$$f(x,y) \overset{\forall (x,y)}{=} e^x (y^2 + \gamma x) \geq e^x \cdot \gamma x = f(x,0)$$

e la funzione $x \mapsto f(x,0)$ ha minimo (per $\gamma > 0$) assoluto in $x = -1$.

Se $\gamma < 0$ si ha $\det Hf(-1,0) = 2\gamma e^{-2} < 0$

e quindi $(-1,0)$ è un punto di sella.

$\square$