Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 20/6/2017 – Canale 1

Esercizio 1 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+x^{2n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 2 Si consideri la curva nel piano $\gamma : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(t^2 - 1, t - \log(1+t)\right), \qquad t > -1.$$

i) Stabilire in quali punti γ è regolare.

ii) Detto $T(t)$ il campo tangente unitario, calcolare i limiti $T^{\pm} = \lim_{t \to 0^{\pm}} T(t)$.

iii) Disegnare il supporto della curva.

Risposte: i) γ reg. per $t \in$; ii) $T^+ =$, $T^- =$; iii) Disegno:

Esercizio 3 Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{2 - (x^2 + y^2)}.$$

i) Provare che f ammette massimo e minimo su K.

ii) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

iii) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risposte: ii) p.ti critici: ; iii) valore min= ; valore max=

Esercizio 4 Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, consideriamo la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \frac{\varphi(y)}{1+x^2} dx + \frac{\varphi(x)}{1+y^2} dy.$$

i) Calcolare tutte le funzioni φ tali che ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$.

ii) Fra le φ del punto i) determinare quella tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = \pi/4$.

iii) Per la φ del punto ii) calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\varphi =$; ii) $\varphi =$; iii) potenziale =

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \quad , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

i) studiare la convergenza puntuale

ii) studiare la convergenza uniforme

Soluzione. Basta studiare $x \geq 0$. Per $x=1$ la serie NON converge.

Sia $0 < \delta < 1$. Se $0 \leq x \leq \delta$ si ha

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \leq \delta^n$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{0 \leq x \leq \delta} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} < \infty$$

Dunque c'è convergenza uniforme su $[0,\delta]$ $\forall \delta < 1$

Sia ora $M > 1$. Se $x \geq M$ si ha

$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \leq \left(\frac{1}{M}\right)^n$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \geq M} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n = \frac{M}{M-1} < \infty$$

Dunque c'è convergenza uniforme su $[M,\infty)$ $\forall M > 1$.

Proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0,1)$.

Dato $\bar{n} \in \mathbb{N}$, il resto della serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} - \sum_{n=0}^{\bar{n}} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Stimiamo

$$\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{0<x<1}{\geq} \frac{1}{2} \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} x^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\bar{n}} x^n\right)$$

e quindi

$$\sup_{0<x<1} \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = +\infty.$$

Analogamente si prova che non c'è convergenza uniforme su $(1,\infty)$.

Risposte:

i) CP per $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

ii) CU per $|x| \leq \delta$ $\forall \delta < 1$ e per $|x| \geq M$ $\forall M > 1$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri la curva piana $\gamma : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(t^2 - 1, \ t - \log(1+t) \right), \quad t > -1.$$

i) Stabilire in quali punti γ è regolare

ii) Detto $T(t)$ il campo tangente unitario, calcolare i limiti

$$\lim_{t \to 0^{\pm}} T(t), \quad \lim_{t \to -1} T(t), \quad \lim_{t \to \infty} T(t).$$

iii) Disegnare il supporto della curva.

Soluzione. i) La derivata di γ è

$$\dot{\gamma}(t) = \left(2t, \ 1 - \frac{1}{1+t} \right).$$

Un punto è regolare se $\dot{\gamma}(t) \neq 0$. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2t = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+t} = 0 \end{cases}.$$

c'è la soluzione $t = 0$. Dunque γ è regolare per $t \neq 0$.

ii) Si ha $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{4t^2 + \dfrac{t^2}{(1+t)^2}} = |t| \sqrt{4 + \dfrac{1}{(1+t)^2}}$.

Dunque

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\left(2t, \ \dfrac{t}{1+t} \right)}{|t| \sqrt{4 + \dfrac{1}{(1+t)^2}}}$$

$$= \frac{t}{|t|} \frac{\left(2, \ \dfrac{1}{1+t} \right)}{\sqrt{4 + \dfrac{1}{(1+t)^2}}}$$

Si trova

$$\lim_{t\to 0^+} T(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(2, \frac{1}{1+t}\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{(1+t)^2}}} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} := T^+$$

$$\lim_{t\to 0^-} T(0) = -\frac{(2,1)}{\sqrt{5}} := T^-$$

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = (1,0)$$

$$\lim_{t\to -1} T(t) = \lim_{t\to -1} -\frac{(2(1+t),1)}{\sqrt{4(1+t)^2+1}} = (0,-1)$$

iii) Sia $x = t^2 - 1 \geq -1$. Invertendo:

$$t^2 = 1+x \iff t = \pm\sqrt{1+x}.$$

Bisogna distinguere i casi $t \geq 0$ e $-1 < t \leq 0$.

Caso $t \geq 0$. Allora $t = \sqrt{1+x}$ e la seconda coordinata di γ è

$$f(x) = \sqrt{1+x} - \log\left(1+\sqrt{1+x}\right)$$

$$= \phi\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{con} \quad \phi(t) = t - \log(1+t)$$

Dunque

$$f'(x) = \phi'\left(\sqrt{1+x}\right) \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad x > -1$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\left(1+\sqrt{1+x}\right)} > 0.$$

Quindi f è crescente con $f(-1) = 0$

Caso $t \leq 0$. Allora $t = -\sqrt{1+x}$ e la seconda coordinata di γ è

$$f(x) = -\sqrt{1+x} - \log\left(1 - \sqrt{1+x}\right)$$

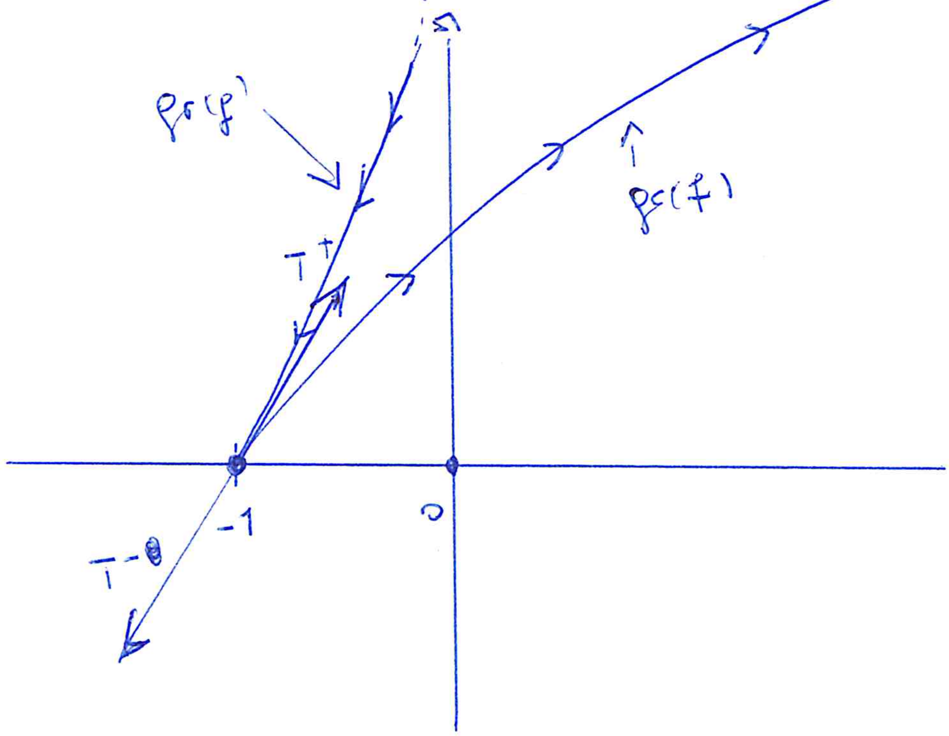
$$= \psi\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{con} \quad \psi(t) = -t - \log(1-t)$$

Ora si ha $\psi'(t) = -1 - \dfrac{-1}{1-t} = -1 + \dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t}{1-t}$.

Dunque

$$f'(x) = \psi'\left(\sqrt{1+x}\right) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\sqrt{1+x}} > 0$$

Qui deve essere $1 - \sqrt{1+x} > 0 \iff 1 > \sqrt{1+x} \iff -1 < x < 0$.



Dunque f è crescente in $[-1,0)$ con $f(-1)=0$

e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

ESERCIZIO Siano $K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \}$ ed $f: K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{2-(x^2+y^2)} .$$

i) Provare che f ammette massimo e minimo su K.
ii) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.
iii) Calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Soluzione i) K è chiuso e limitato e quindi è compatto (Teorema di Heine - Borel). K è il disco chiuso unitario. f è continua su K. Per il Teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo su K.

ii) Le derivate parziali di f sono

$$f_x = y + \frac{2x}{[2-(x^2+y^2)]^2} ,$$

$$f_y = x + \frac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2} .$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = 0$ è dunque

$$\begin{cases} y + \dfrac{2x}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \\[2ex] x + \dfrac{2y}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0 \end{cases} .$$

Il punto $(x,y) = (0,0)$ risolve il sistema.

Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e sottraendo le due equazioni si trova

$$\frac{2\,(x^2-y^2)}{[2-(x^2+y^2)]^2} = 0$$

che implica $x = \pm y$. Inserendo $x = y$ nella prima equazione si trova

$$x\left(1+\frac{2}{[2-2x^2]^2}\right) = 0$$

che implica $x=0$ e quindi $y=0$.

Inserendo $x=-y$ nella prima equazione si trova:

$$x\left(-1+\frac{2}{[2-2x^2]^2}\right) = 0 .$$

Oltre a $x=0$ si trova l'equazione

$$\frac{4}{2\,[1-x^2]^2} = 1$$

che fornisce $[1-x^2]^2 = \frac{1}{2} \iff 1-x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad (1-x^2 \geq 0)$

$$\iff x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} .$$

Ci sono tre punti critici

$$\pm\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\,,\ -\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \quad e \quad (0,0)$$

Osserviamo che $f(0,0) = \frac{1}{2}$ mentre

$$f\left(\pm\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right) = -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}.$$

Osserviamo che $-1+\sqrt{2} < \frac{1}{2}$.

iii) Studiamo f su $\partial K = \{x^2+y^2=1\}$.

Siano $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ con $\theta \in [0,2\pi)$ e studiamo

$$\phi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta\cos\theta + 1$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\theta) + 1$$

Il massimo è preso per $\sin 2\theta = 1$ ed è $\frac{3}{2}$.

Il minimo è preso per $\sin 2\theta = -1$ ed è $+\frac{1}{2}$.

Concludiamo che

$$\max_K f = \frac{3}{2} \quad e \quad \min_K f = \sqrt{2}-1.$$

$\square$

ESERCIZIO Data una funzione $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ consideriamo la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \frac{\phi(y)}{1+x^2}\,dx + \frac{\phi(x)}{1+y^2}\,dy .$$

i) Calcolare tutte le ϕ tali che ω sia chiusa (esatta) su $\mathbb{R}^2$

ii) Fra le ϕ del punto i) determinare quella tale che $\phi(0)=0$ e $\phi(1)=\pi/4$

iii) Per la ϕ del punto ii) calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. i) $\mathbb{R}^2$ è convesso ($\Rightarrow$ semplicemente connesso) e dunque ω esatta $\Leftrightarrow$ ω chiusa.

La condizione di chiusura è:

$$\frac{\phi'(y)}{1+x^2} = \frac{\phi'(x)}{1+y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ovvero

$$(1+y^2)\,\phi'(y) = (1+x^2)\,\phi'(x) \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

Questo significa che esiste una costante $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che $(1+x^2)\,\phi' = k_1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Integrando

$$\phi'(x) = \frac{k_1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

si trova $\phi(x) = k_1 \operatorname{arctg} x + k_2$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

ii) Il sistema $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = \pi/4$ fornisce

$$\begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{= \pi/4} = \pi/4 \end{cases}$$

e quindi $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$,

iii) La forma è $\omega = \dfrac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}\, dx + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+y^2}\, dy$.

Cerchiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $df = \omega$ ovvero

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2} \\[2ex] f_y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+y^2} \end{cases}.$$

Integrando la prima equazione:

$$f(x,y) = \int \frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} y + c(y)$$

e quindi

$$f_y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+y^2} + c'(y).$$

Inserendo nella seconda equazione si trova $c'(y) = 0$ ovvero $c =$ costante. Un potenziale è:

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} y.$$

□