Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 25/1/2018 – Canale 1

Esercizio 1 (11 punti) Calcolare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga il seguente integrale improprio

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{(x+2)^2[\log(1+x)]^\alpha} dx.$$

Risposta: $\alpha \in$

Esercizio 2 (11 punti) Sia $\beta \geq 0$ un parametro reale e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti i valori di $\beta \geq 0$ tali che:

i) f sia continua nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$;

ii) f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$;

iii) f abbia tutte le derivate direzionali nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$;

iv) f sia differenziabile in 0.

Risposte: i) $\beta \in$; ii) $\beta \in$; iii) $\beta \in$; iv) $\beta \in$

Esercizio 3 (10 punti) Dato un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x(x^2 + \gamma y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Al variare di γ, calcolare i punti critici di f.

ii) Al variare di γ, stabilire se i punti critici trovati sono punti di massimo/minimo locale/assoluto.

Risp.: i) Punti critici: ; ii) Max/min loc/ass:

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Stabilire tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga il seguente integrale improprio

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{t}{(t+2)^2 [\log(1+t)]^\alpha} \, dt .$$

Risoluzione. Separiamo lo studio sugli intervalli $[0,1]$ e $[1,\infty)$.

Iniziamo dall'integrale

$$\int_0^1 \frac{t}{(t+2)^2 [\log(1+t)]^\alpha} \, dt .$$

Siccome $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0^+$, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se converge il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{t}{t^\alpha} \, dt < \infty \iff \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}} \, dt < \infty$$

$$\iff \alpha - 1 < 1 \iff \boxed{\alpha < 2}.$$

Passiamo allo studio dell'integrale

$$\circledast = \int_1^\infty \frac{t}{(t+2)^2 [\log(1+t)]^\alpha} \, dt .$$

Prendiamo la funzione di confronto

$$g(t) = \frac{1}{(t+1) [\log(1+t)]^\alpha}$$

Osserviamo che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{t}{(t+2)^2[\log(1+t)]^\alpha}}{g(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t\,(t+1)}{(t+2)^2} = 1.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale ⊛ converge se e solo se converge l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{(t+1)[\log(1+t)]^\alpha}\,dt < \infty \quad \overset{(\alpha\neq 1)}{\iff} \quad \left[\frac{[\log(1+t)]^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{t=1}^{t=\infty} < \infty$$

$$\iff -\alpha+1 < 0$$

$$\iff \boxed{\alpha > 1}$$

Nel caso $\alpha = 1$, la primitiva è $\log(\log(t+1))$ e l'integrale diverge.

Conclusione: I_α converge $\iff 1 < \alpha < 2$.

□

ESERCIZIO Sia $\beta \geq 0$ un parametro e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti i $\beta \geqslant 0$ tali che:

i) f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$;

iii) f abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iv) f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Continuità in $0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} \leq \frac{|x|^\beta |y|}{\sqrt{|y|}} = |x|^\beta \sqrt{|y|} \xrightarrow[\text{se } y \to 0]{} 0$$

indipendentemente da $\beta \geqslant 0$.

Quindi f cont. in $0 \in \mathbb{R}^2 \iff \beta \geqslant 0$.

ii) Su $x \neq 0$ f è continua (quoziente di funzioni continue). Studiamo la cont. nel punto $(0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $y_0 \neq 0$. Se $\beta > 0$: $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{|x|^\beta y}{|x| + \sqrt{|y|}} = 0 = f(0,y_0)$.

Se $\beta = 0$: $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\overbrace{|x|^0}^{=1} y}{|x| + \sqrt{|y|}} = \sqrt{|y_0|}\,\text{sign}(y_0) \neq 0$.

Quindi: f cont. su $\mathbb{R}^2 \iff \beta > 0$.

iii) Se esiste, la derivata direzionale nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$ nella direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{|t|^{\beta+1} |v_1|^{\beta} |v_2|}{|t|\,|v_1| + \sqrt{|t|}\,\sqrt{|v_2|}}$$

Se $\beta = 0$ si trova

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t\sqrt{|t|}} \frac{|v_2|}{\sqrt{|t|}\,|v_1| + \sqrt{|v_2|}}$$

e il limite esiste solo se $v_2 = 0$.

Se $\beta > 0$ si trova

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|^{\beta+1}}{t\sqrt{|t|}} \frac{|v_1|^{\beta} |v_2|}{\sqrt{|t|}\,|v_1| + \sqrt{|v_2|}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } |v_2| = 0 \quad \text{indip. da } \beta \\ 0 & \text{se } \beta > 1/2 \\ \text{non esiste finito} & \text{se } \beta \leq 1/2 \end{cases}$$

Conclusione: tutte le derivate direzionali esistono (e sono $= 0$) se e solo se $\beta > 1/2$.

iv) ~~ix~~) Poniamo limitarci al caso $\beta > 1/2$. In questo caso

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Per essere differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$, f deve verificare:

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\beta \, |y|}{(|x| + \sqrt{|y|})\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (*)$$

Procediamo con delle stime dirette:

$$\frac{|x|^\beta \overset{=\sqrt{|y|}\cdot\sqrt{|y|}}{|y|}}{(|x| + \sqrt{|y|})(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{|x|^\beta \sqrt{|y|}}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Nel caso che

$$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} \iff \beta > \frac{1}{2}$$

il limite in $(*)$ è $= 0$.

Dunque: f differenziabile in $0 \iff \beta > \frac{1}{2}$.

$\square$

ESERCIZIO Dato il parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x (x^2 + \gamma y^2).$$

i) Al variare di γ, calcolare tutti i punti critici di f.

ii) Al variare di γ, stabilire se i punti critici sono punti di max/min locale/globale.

Risoluzione. i) Le derivate parziali di f sono:

$$f_x = e^x (x^2 + \gamma y^2) + e^x \cdot 2x = e^x (x^2 + \gamma y^2 + 2x)$$

$$f_y = e^x \, 2\gamma y.$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ diventa

$$\begin{cases} x^2 + \gamma y^2 + 2x = 0 \\ 2\gamma y = 0 \end{cases}$$

Nel caso $\gamma = 0$ si riduce a $x^2 + 2x = 0$ ovvero $x = 0$ oppure $x = -2$. Si trovano i punti critici

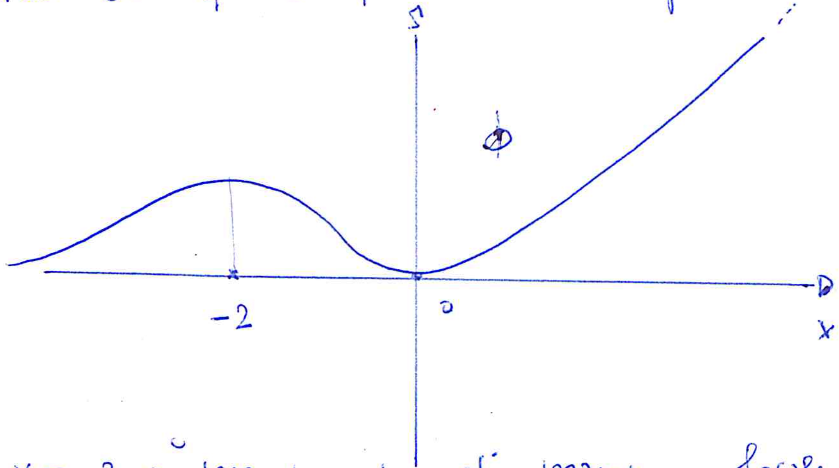
$$(0,y), (-2,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Se $\gamma \neq 0$ la seconda equazione fornisce $y = 0$ e la prima diventa di nuovo $x^2 + 2x = 0$. I punti critici sono $(0,0), (-2,0) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Nel caso $\gamma = 0$ la funzione si riduce a

$$f(x,y) = e^x x^2 = \phi(x).$$

Il grafico di ϕ è fatto nel seguente modo:



dove $x=-2$ è un punto di massimo locale e $x=0$ è di minimo assoluto. Dunque:

$(0,y)$ punti di min. assoluto di f
$(-2,y)$ punti di max. locale di f $\quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Studiamo il caso $\gamma \neq 0$. La matrice Hessiana di f è:

$$f_{xx} = e^x (x^2 + \gamma y^2 + 2x + 2x + 2)$$

$$f_{xy} = e^x (2\gamma y)$$

$$f_{yy} = e^x (2\gamma)$$

Analisi del punto $(0,0)$:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tr} Hf(0,0) &= 2(\gamma+1) \\ \det Hf(0,0) &= 4\gamma \end{aligned}$$

Dunque:

$\gamma > 0 \Rightarrow Hf(0,0) > 0 \Rightarrow (0,0)$ p.to di minimo locale stretto.

$\gamma < 0 \Rightarrow \det Hf(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0)$ p.to di sella.

In effetti per $\gamma > 0$ si ha $f \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$ e quindi $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ è un (il) punto di minimo assoluto.

Analisi del punto $(-2,0)$:

$$Hf(-2,0) = e^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} Hf(-2,0) = (-2+2\gamma)e^{-2}$$

$$\det Hf(-2,0) = -4\gamma e^{-4}$$

Dunque:

$\gamma > 0 \Rightarrow \det Hf(-2,0) < 0 \Rightarrow (-2,0)$ punto di sella

$$\gamma < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det Hf(-2,0) > 0 \\ \operatorname{tr} Hf(-2,0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-2,0) \text{ punto di massimo locale.}$$

Siccome $\lim_{x \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, il punto $(-2,0)$ non può essere un punto di massimo assoluto.

$\square$