Analisi Matematica 2
Esercizi settimanali

Roberto Monti

Fisica e Astronomia – Anno Accademico 2017-18

Indice

Introduzione

In questo testo sono raccolte 11 schede di esercizi. L'ordine degli argomenti corrisponde all'ordine seguito nel corso di Analisi Matematica 2 per Fisica ed Astronomia, dalle serie numeriche alle forme differenziali. Gli esercizi cercano di illustrare in modo pratico tutti gli aspetti (definizioni, teoremi, criteri, tecniche) studiati nel corso di teoria.

Ogni scheda di esercizi corrisponde approssimativamente al lavoro da fare a casa sugli esercizi nell'arco di una settimana.

Per alcuni esercizi è indicata la risposta. Di nessun esercizio è riportata la risoluzione integrale.

Questi esercizi fanno parte integrante del programma del corso di Analisi Matematica 2, Canale 1.

Gli esercizi con $\bigstar$ alla fine di ciascuna scheda sono più difficili. Possono essere affrontati (dopo aver lavorato sui precedenti) da chi vuole cimentarsi con sfide più impegnative.

SETTIMANA 1

Serie numeriche I

Esercizio 1.1. Studiare la convergenza delle serie numeriche

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Risposte: i) converge (Criterio del rapporto); ii) converge (Criterio della radice oppure confronto con la serie geometrica di ragione 4/5); iii) converge (Criterio del rapporto).

Esercizio 1.2. Studiare la convergenza delle seguenti serie

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$; iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\log n}$.

Risposte: i) converge (Criterio del confronto, usare $\log n \leq \sqrt{n}$ per $n \geq \bar{n}$); ii) diverge (confronto); iii) converge (Leibniz).

Esercizio 1.3. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\big(\sqrt{1+n^4}-n^2\big)$$

converga. Risposta: $\alpha > -1$ (Criterio del confronto).

Esercizio 1.4. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$.

Risposta: 3/4. (Cfr. serie telescopiche).

Esercizio 1.5. ★ Sia $0 < a < 1$ un numero reale e definiamo $a_n \in (-1, 0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Assumendo come nota la disuguaglianza

$$(*) \qquad |a_n| \leq \frac{1}{n}\Big(\frac{1-a}{a}\Big), \quad n \geq 1,$$

studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

ii) Provare la $(*)$.

SETTIMANA 2

Serie numeriche II

Esercizio 2.1. Sia Q un quadrato di lato 2 e sia Q_n, $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che Q_n abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati Q_n dentro il quadrato Q senza che si sovrappongano fra loro?

Esercizio 2.2. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n\big(\sin(2x)\big)^n}{n^2+1}; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(x^2-3x+2)^n}{2^n(n^2+4)}.$$

Risposte: i) converge assolutamente e semplicemente per $x \in (-\infty, -3/2) \cup (-3/4, \infty)$, non converge (nè semplicemente nè assolutamente) per $x \in [-3/2, -3/4]$; ii) discutere i casi $|\sin 2x| < 1/2$, $|\sin 2x| > 1/2$, $\sin 2x = 1/2$, $\sin 2x = -1/2$. Nell'ultimo caso c'è convergenza semplice (Leibniz) ma non assoluta (Criterio del confronto).

Esercizio 2.3. Studiare la convergenza delle serie

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n}+|2x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|y|^n},\ x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Converge semplicemente ma non assolutamente (Confronto con la serie armonica).

Esercizio 2.4. Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-n\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Esercizio 2.5. Al variare dei numeri reali $\alpha > 0$ ed $x > 1$ studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

Esercizio 2.6. ★ Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\Big)$$

converge se e solo se esiste finito il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Idee: serie telescopiche, $\log(1+x) \leq x$.

Integrali impropri

Esercizio 3.1. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx; \quad 2)\ \int_0^\infty x^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,dx; \quad 3)\ \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta x}\sin(\alpha x)\,dx, \quad \beta>0,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Risposte: 1) 0. L'integrale su $(0,1)$ è l'opposto di quello su $(1,\infty)$. 2) 1. 3) $\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$. Una primitiva si trova integrando per parti due volte.

Esercizio 3.2. i) Determinare tutti i parametri $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^\infty \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)}dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

Risposte: i) Spezzare l'integrale su $(0,1)$ e $(1,\infty)$. Discutere separatamente quattro integrali elementari. ii) Parallelogramma centrato nell'origine.

Esercizio 3.3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri (non si chiede di calcolarli)

$$1)\ \int_0^\infty \sin^2 x\,dx; \quad 2)\ \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,dx; \quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Risposte: 1) diverge a ∞; 2) diverge a ∞; 3) converge.

Esercizio 3.4. Calcolare gli $\alpha>0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\tan x - x}\,dx; \quad 2)\ \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)}\,dx;$$

$$3)\ \int_0^\infty \frac{\pi/2-\arctan(\sqrt{x})}{x^\alpha}\,dx; \quad 4)\ \int_2^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\log^\alpha x}dx.$$

Risposte: 1) $\alpha>1$; 2) $\alpha>0$; 3) $1/2<\alpha<1$. Al fine di studiare la convergenza a ∞ con il Criterio del confronto asintotico, determinare preliminarmente $\beta\in\mathbb{R}$ tale che il limite

$$\lim_{x\to\infty} x^\beta(\pi/2-\arctan(\sqrt{x})) = L \neq 0$$

esista finito e diverso da 0. 4) $\alpha>1$ (Confronto asintotico con $\frac{1}{x\log^\alpha x}$).

Esercizio 3.5. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}dx; \quad 2)\ \int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \cos x\, dx; \quad 3)\ \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \tan\frac{1}{x}\right) \sin x\, dx.$$

Risposte: 1) Converge assolutamente (Confronto). 2) Converge assolutamente (Confronto). Usare la disuguaglianza $x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \leq x^{-2}$ per $x \geq M$. 3) Converge assolutamente (Criterio del confronto asintotico). Ricordare lo sviluppo $\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ per $x \to 0$.

Esercizio 3.6. Studiare la convergenza dei seguenti integrali con il Criterio di Abel

$$1)\ \int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x}\, dx; \quad 2)\ \int_1^\infty \sin(x) \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx; \quad 3)\ \int_0^\infty x^2 \cos(x^4)\, dx.$$

SETTIMANA 4

Curve

Esercizio 4.1. Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

1) Verificare che γ è regolare, calcolare il campo tangente unitario T e disegnare il supporto.
2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{|z|}$, calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma f\, ds$.

Risp. $[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]/12$.

Esercizio 4.2. Siano $L > 0$ ed $\alpha \geq 0$ due parametri fissati. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [L, L] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\alpha \cosh t\, \cos t, \alpha \cosh t\, \sin t, \alpha t), \quad t \in [-L, L].$$

Disegnare il supporto di γ. Risp. $2\sqrt{2}\alpha \sinh L$.

Esercizio 4.3. Si consideri la curva piana $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\frac{t^3}{3} - t, (\log t)^2\Big), \quad t > 0.$$

i) Stabilire se γ è semplice e se è regolare.
ii) Se possibile, calcolare il campo tangente unitario $T(t)$ e poi calcolare i limiti
$$\lim_{t \to 1^\pm} T(t).$$
iii) Disegnare il supporto di γ.

Esercizio 4.4. Si consideri il tratto di cicloide $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Posto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Calcolare l'integrale di f lungo γ

$$I = \int_\gamma f\, ds.$$

Esercizio 4.5. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana data dall'equazione polare $\varrho = 1 - \cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Disegnare il supporto di γ e calcolare la sua lunghezza.

Risp. $L = 8$. La curva γ è la cardioide.

Esercizio 4.6. ★ Siano $f, F \in C^2([0, 1])$ due funzioni convesse tali che $f \leq F$ in tutti i punti, $f(0) = F(0)$ ed $f(1) = F(1)$. Consideriamo le curve date in forma cartesiana $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\Gamma(t) = (t, F(t))$. Provare che $L(\Gamma) \leq L(\gamma)$.

SETTIMANA 5

Spazi metrici e limiti in più variabili

Esercizio 5.1. Quali tra le seguenti funzioni $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sono distanze su $\mathbb{R}$?
ii) $d(x, y) = |x - y| + |x^3 - y^3|$.
iii) $d(x, y) = x^2 + y^2 + xy$.
iv) $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$.

Esercizio 5.2. Determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita ciascuna delle seguenti funzioni:
i) $f(x, y) = \sqrt{xy + \log x}$; ii) $g(x, y) = \sqrt{xe^y - ye^x}$; iii) $h(x, y) = \sqrt{xy(xy - 1)}$.

Esercizio 5.3. Stabilire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti limti:

$$\text{i)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^2}; \qquad \text{ii)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 5.4. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 5.5. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

sia continua nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 5.6. ★ Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $| \cdot |$ è la norma standard di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

SETTIMANA 6

Convergenza uniforme

Esercizio 6.1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x + n^2x^3}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.2. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 6.3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 6.4. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nx^2-n^2x}.$$

Esercizio 6.5. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-\log x)\log^n x,$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 6.6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n.$$

i) Calcolare il raggio di convergenza R della serie.
ii) Discutere la convergenza uniforme della serie.

ESERCIZIO 6.7. ★ Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \leq a < b \leq \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su (a, b).

SETTIMANA 7

Funzione esponenziale e topologia

ESERCIZIO 7.1. Dedurre le formule di addizione per seno e coseno per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z+\zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ con $z, \zeta \in \mathbb{C}$ e dalle identità di Eulero

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

ESERCIZIO 7.2. Determinare interno, frontiera e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Dire se sono aperti, chiusi (o né aperti né chiusi):

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1,\ y \geq x^2\}$;
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$.

ESERCIZIO 7.3. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; ii) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

ESERCIZIO 7.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 < 1\right\}.$$

i) Provare che A è limitato; ii) Stabilire se A è aperto e/o chiuso.
Soluzione negli appunti on line.

ESERCIZIO 7.5. ★ Provare che la costante di Eulero e non è un numero razionale.
Sugg. Dalla formula

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

si ottiene la stima per le somme parziali

$$0 < \frac{1}{\mathrm{e}} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!}.$$

SETTIMANA 8

Derivate parziali. Funzioni differenziabili

Esercizio 8.1. Detto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, sia $f : A \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^{xy} + y\log x \\ y^{xy} - x\log y \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice Jacobiana di f in un generico punto del dominio. È vero che

$$\det Jf(x,x) \neq 0 \quad \text{per ogni } x > 0?$$

Esercizio 8.2. Calcolare il piano tangente in un generico punto della superficie 2-dimensionale $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + xy - z^2 + 1 = 0\}$. Tracciare un disegno approssimativo di M.

Esercizio 8.3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^6}{x^6+y^8} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$. 2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 8.4. Sia $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad |x| \neq 0,$$

dove $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Calcolare in un generico punto $x \neq 0$ la derivata direzionale di f lungo la direzione $v = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$.

Esercizio 8.5. Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = \frac{y|x|^\alpha}{x^4+y^2}, \quad g(x,y) = y\sin\Big(\frac{|x|^\beta}{x^2+y^4}\Big),$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
3) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\Big(\frac{|x|^\gamma}{x^4+y^2}\Big) = 0.$$

Esercizio analogo risolto negli appunti on line.

SETTIMANA 9

Funzioni C^1 e C^2. Insiemi compatti.

Esercizio 9.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Provare che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 9.2. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$.

Provare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$. Verificare inoltre la formula di Eulero, per $x \neq 0$,

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

Esercizio 9.3. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\log(x^2+y^2))^{1/2}, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Provare che $f \in C^1(A)$;
ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$;
iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

Esercizio 9.4. Sia (X,d) uno spazio metrico e siano $K_1, \dots, K_n \subset X$ insiemi compatti. Provare che $K_1 \cup \ldots \cup K_n$ e $K_1 \cap \ldots \cap K_n$ sono ancora compatti. È vero che l'unione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto? È vero che l'intersezione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto?

Esercizio 9.5. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $H, K \subset \mathbb{R}^2$ sono compatti:

$$K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^8 + y^8 - x^4 + y^4 \leq 1\big\},$$
$$H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^3 + xy + y^3 \leq 1\big\}.$$

SETTIMANA 10

Massimi, minimi, punti critici

Esercizio 10.1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 10.2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Calcolare i punti critici di f e stabilire se sono punti di massimo/minimo locale.

Esercizio 10.3. Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 2\pi\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(2x)\cos(y).$$

i) Provare che f assume massimo e minimo su K;
ii) Calcolare i punti critici di f nell'interno di K e classificarli;
iv) Tracciare un grafico qualitativo di f;
v) Determinare l'insieme $f(K)$.

Esercizio 10.4. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e consideriamo l'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \frac{1}{\alpha^2 + y^2}\right\}.$$

Provare che la funzione $f(x, y) = 2xy$ assume massimo su A e calcolarlo.

Esercizio 10.5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Calcolare i punti critici di f e stabilire se sono punti di massimo/minimo locale.

Esercizio 10.6. ★ Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\mathrm{int}(K) \ne \emptyset$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in $\mathrm{int}(K)$; 3) f è costante su ∂K. Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \mathrm{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

SETTIMANA 11

Forme differenziali

Esercizio 11.1. Calcolare l'integrale della 1-forma differenziale ω lungo la curva γ assegnata:

i) $\omega = x^2dx + xydy$ in $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t)$ con $t \in [-1, 1]$.
ii) $\omega = (x - z)dx + (1 - xy)dy + ydz$ in $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ con $t \in [0, 1]$.
iii) $\omega = 2x(x+y)dx+2y(x+y)dy$ in $\mathbb{R}^2$ lungo la curva γ con equazione polare $\varrho = k\vartheta$, dove $\vartheta \in [0, \pi/2]$ e $k \geq 0$ è un parametro fissato (spirale di Archimede).

Risp. i) 0; ii) 29/20; iii) $k^3(\pi^2 + 4\pi - 16)/2$.

Esercizio 11.2. Stabilire se i seguenti insiemi sono contraibili (semplicemente connessi):

i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^3$;
ii) $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + |x|) \geq |x|/2\big\}$ in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$;
iii) $C = \big\{(x + y, xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Risp. i) No; ii) Si; iii) Si.

Esercizio 11.3. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}\Big((x - y)dx + (x + y)dy\Big)$$

sia chiusa. Par tali valori ω è anche esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Risp. $\alpha = 1$; No.

Esercizio 11.4. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (\alpha y + z)dx + (\alpha x + z)dy + (\alpha x + y)dz$$

sia chiusa. Par tali valori calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^3$.

Risp. $\alpha = 1$.

Esercizio 11.5. Si consideri la 1-forma differenziale nel piano

$$\omega = \Big(\log(x + y) + \frac{x}{x + y}\Big)dx + \frac{x}{x + y}dy.$$

i) Determinare il più grande insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ su cui ω è ben definita.
ii) Stabilire se ω è chiusa in A.
iii) Stabilire se ω è esatta in A ed eventualmente calcolarne un potenziale.

Risp. $f(x,y) = x\log(x+y)$.

ESERCIZIO 11.6. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1-\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\big(xdx+ydy\big).$$

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \mathrm{e}^{\vartheta}$ con $\vartheta \in [0,\pi/2]$ (spirale logaritmica). Determinare preliminarmente un potenziale della forma.

Risp. iii) $\mathrm{e}^{\pi/2} + \cos(\mathrm{e}^{\pi/2}) - 1 - \cos 1$.

ESERCIZIO 11.7. Si consideri la forma differenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\big((x^2-y^2)dx - 2xydy\big).$$

Stabilire se ω è chiusa oppure esatta, ed eventualmente calcolarne un potenziale.