Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 21/6/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Dato un parametro $\beta > 0$, si consideri la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x, y) = (x^5 + y^5)^\beta.$$

i) (3pt) Calcolare tutti i $\beta > 0$ tali che g abbia tutte le derivate direzionali nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) (4pt) Calcolare tutti i $\beta > 0$ tali che g sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $\beta \in$; ii) $\beta \in$

Esercizio 2 Si consideri la curva nel piano $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(\cos t, t^2 \sin t\big), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

i) (3pt) Calcolare il campo tangente unitario T. Calcolare il limite $T^+ = \lim_{t \to 0^+} T(t)$.

ii) (3pt) Studiare la monotonia della seconda coordinata di γ.

iii) (2pt) Disegnare il supporto della curva, con precisione intorno al punto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) γ reg. per $t \in$; $T^+ =$; ii) Monotonia:

Esercizio 3 Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\alpha x},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) (1pt) Provare che f ammette massimo e minimo su K.

ii) (3pt) Al variare di α, calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

iii) (4pt) Al variare di α, calcolare i valori minimo e massimo di f su K.

Risposte: ii) p.ti critici interni: ; iii) val. min= ; val. max=

Esercizio 4 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x n^{-x+1}}{n^2 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (3pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (4pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) (2pt) Stabilire se c'è convergenza uniforme su $[0, \delta]$ con $\delta > 0$.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$; iii) CU su $[0, \delta]$: si/no

3 ore a disposizione

Esercizio Sia $\beta > 0$ un parametro e si consideri

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = (x^5 + y^5)^\beta .$$

i) Determinare tutti i $\beta > 0$ tali che f ~~sia~~ abbia tutte le derivate direzionali nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti i $\beta > 0$ tali che f sia differenziabile nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Dato $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(t^5 v_1^5 + t^5 v_2^5 \right)^\beta$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^{5\beta}}{t} (v_1^5 + v_2^5)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } 5\beta > 1 \\ (v_1^5 + v_2^5)^{1/5} & \text{se } \beta = 1/5 \\ \text{non esiste finito se} & \beta \quad 1/5 \end{cases}$$

Risposta: $\beta \geq 1/5$

ii) Se $\beta < 1/5$ f non può essere differenziabile perché non esistono le derivate direzionali.

Se $\beta = 1/5$ f non è differenziabile perché

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0) = (v_1^5 + v_2^5)^{1/5} \quad \text{non è lineare}$$

Rimane da studiare il caso $\beta > 1/5$. In questo caso: $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Test della differenziabilità:

$$\frac{f(x,y) - f(0) - \langle \nabla f(0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^5+y^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Stime:

$$\left| \frac{(x^5+y^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{(|x|^5+|y|^5)^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5\right]^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq 2^\beta \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5\beta - 1} \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{\text{se } 5\beta - 1 > 0} 0$$

Risposta: f differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2 \iff \beta > 1/5$.

□

<u>COMMENTO</u> La funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^5+y^5)^\beta$$

NON è ben definita per tutti i valori di $\beta > 0$.

É però ben definita per $\beta = \dfrac{m}{2n+1}$ con $m = 1, 2, 3 \ldots$ ed $n = 0, 1, 2 \ldots$

Esercizio Sia $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = (\cos t,\ t^2 \sin t) \qquad t \in [0,2\pi]$$

i) Calcolare, se possibile, il campo tangente unitario T.
Calcolare $T^+ = \lim_{t \to 0^+} T(t)$.

ii) Studiare la monotonia della seconda coordinata di γ

iii) Disegnare il supporto di γ.

Risoluzione. La curva γ è chiusa, nel senso che $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$.

i) Derivata:
$$\dot\gamma(t) = (-\sin t,\ 2t \sin t + t^2 \cos t)$$

Punti regolari. Studio il sistema $\dot\gamma(t) = (0,0)$:

$$\begin{cases} -\sin t = 0 \\ 2t \sin t + t^2 \cos t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin t = 0 \\ t^2 \cos t = 0 \end{cases} \iff t = 0$$

Quindi in $t = 0$ γ non è regolare. Per $t \in (0, 2\pi]$ γ è regolare. Poi:

$$|\dot\gamma(t)| = \left((\sin t)^2 + (2t \sin t + t^2 \cos t)^2\right)^{1/2}.$$

Per $t \neq 0$ è ben definito

$$T = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(-\sin t,\ 2t \sin t + t^2 \cos t)}{(\ \ldots\ )^{1/2}}.$$

Abbiamo

$$T^+ = \lim_{t \to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\dot\gamma(t)}{t} \cdot \frac{t}{|\dot\gamma(t)|},$$

A parte:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{r}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{\sin t}{t},\ 2\sin t + t\cos t\right) = (-1,0)$$

e analogamente $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|\dot{r}(t)|} = +1$. Quindi:

$$T^+ = (-1,0)$$

ii) Seconda coordinata:

$$\phi(t) = t^2 \sin t \quad \text{con} \quad \dot{\phi}(t) = 2t\sin t + t^2\cos t,$$

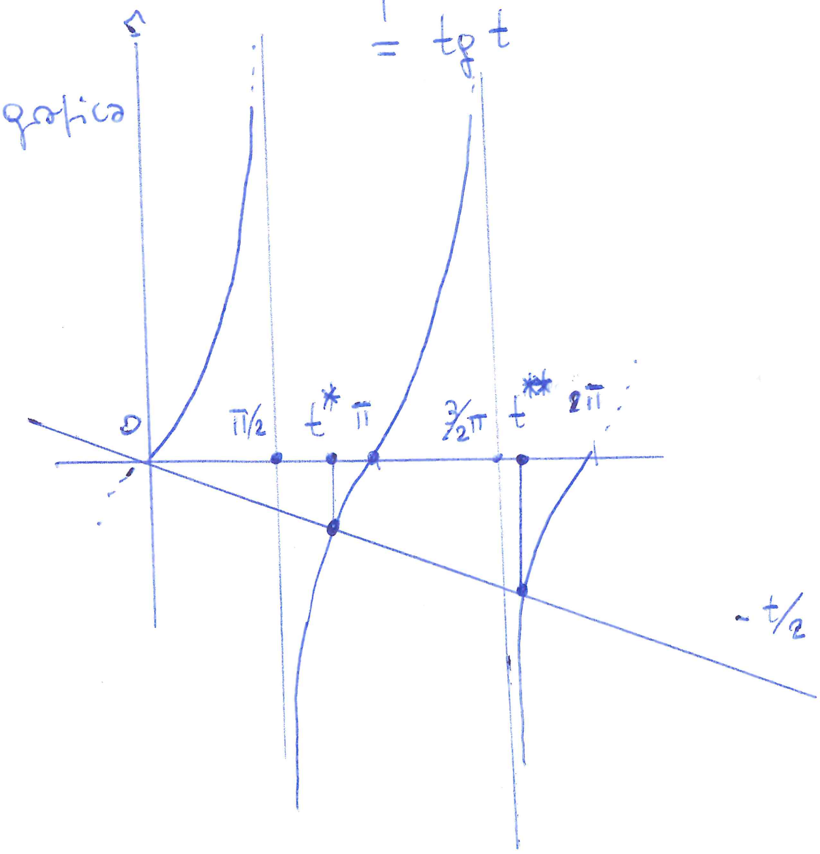
studiamo $\dot{\phi} \geq 0$ per $t \in [0,2\pi]$. Troviamo prima gli zeri:

$$\dot{\phi}(t) = 0 \iff t\,(2\sin t + t\cos t) = 0$$

$t=0$ è soluzione e poi: $\displaystyle = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{t}{2}$

$$= \operatorname{tg} t$$

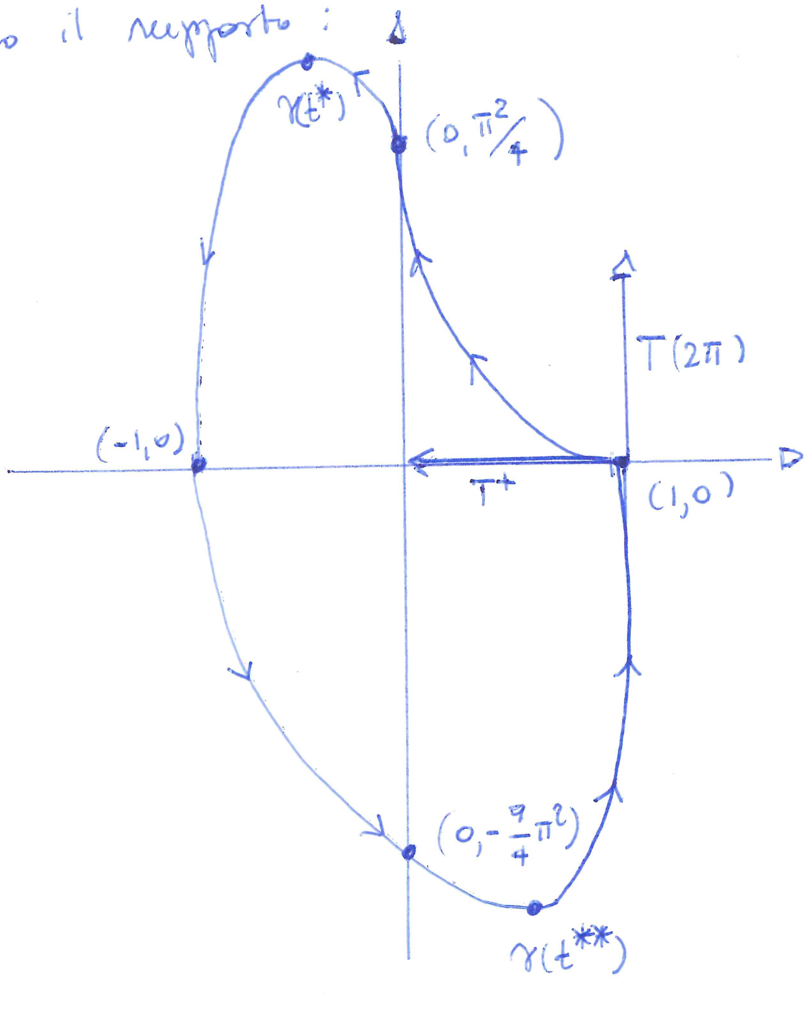
Soluzione grafica



Dunque $\dot\phi(t) = 0$ per $t = 0$, $t = t^* \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e
$t = t^{**} \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

Dallo studio del segno di $\dot\phi$ (omesso) vediamo che $\phi(t)$ cresce per $t \in [0, t^*]$, decresce per $t \in [t^*, t^{**}]$ e cresce di nuovo per $t \in [t^{**}, 2\pi]$.

iii) Combinando le informazioni precedenti con la monotonia nota di $t \mapsto \cos t$ (1^ coordinata) troviamo il supporto:



Esercizio Su $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ si consideri $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{\alpha x},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Provare che f assume valore massimo e minimo su K.

2) Al variare di α calcolare tutti i punti critici di f interni a K.

3) Al variare di α calcolare il valore massimo e minimo di f su K.

Risoluzione 1) K è compatto (chiuso e limitato) ed f è continua. I p.ti di max\min esistono per il Teorema di Weierstrass.

2) Derivate parziali:

$$f_x = e^{\alpha x}\left(2x + \alpha(x^2+y^2)\right)$$

$$f_y = e^{\alpha x}\, 2y\,.$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ diventa:

$$\begin{cases} 2x + \alpha(x^2+y^2) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$ c'è il solo punto critico $(0,0)$.

Se $\alpha \neq 0$ risolviamo $x(2+\alpha x) = 0 \iff x = 0$ op. $x = -\frac{2}{\alpha}$.

Ci sono due punti critici: $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right)$.

Il primo è sempre interno. Il secondo è interno se e solo se $\frac{4}{\alpha^2} < 1 \iff \alpha^2 > 4 \iff \alpha \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$.

3) Osserviamo che $f \geq 0$ ed $f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.

Quindi $(0,0)$ è il (unico) punto di minimo assoluto.

Deduciamo che per $|\alpha| \leq 2$ il punto di massimo assoluto di f su K deve stare in ∂K.

Parametrizziamo ∂K in questo modo: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Consideriamo

$$\phi(t) = f(\gamma(t)) = e^{\alpha \cos t}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Il massimo è preso per $\cos t = 1$ se $\alpha > 0$ e per $\cos t = -1$ se $\alpha < 0$. Deduciamo che

$$\max_{\partial K} f = e^{|\alpha|}.$$

Nel punto critico $\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right)$ la funzione f vale:

$$f\left(-\frac{2}{\alpha}, 0\right) = \frac{4}{\alpha^2} e^{-2}$$

Studiamo il caso $|\alpha| > 2$ (punto critico interno).

In questo caso:

$$\frac{4}{\alpha^2} \frac{1}{e^2} < 1 < e^{|\alpha|}$$

Dunque il massimo è assunto ($\forall \alpha$) nella frontiera

Risposta: $\min_K f = 0$ e $\max_K f = e^{|\alpha|}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

① Studiare la convergenza puntuale.

② Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione. ① Per $x=0$ la serie converge e la somma è 0. Per $x>0$ si ha:

$$0 < \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \leq \frac{x\, n^{1-x}}{n^2} = \frac{x}{n^{1+x}}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} < \infty, \quad \text{essendo} \quad 1+x>1,$$

per confronto la serie data converge.

Per $x<0$ il termine generale è negativo.

Inoltre per $n \geq |x|$ (quindi definitivamente)

$$\frac{|x|\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \qquad \frac{|x|\, n^{1-x}}{n^2+n^2} = \frac{|x|}{2\, n^{1+x}}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} = +\infty \quad \text{nel caso} \quad 1+x<1,$$

deduciamo che la serie data diverge per $x<0$.

Risposta: CP per $x \in [0, \infty)$.

(2) Riprendiamo i conti precedenti. Siano $0 < \delta < M < +\infty$. Se $\delta \leq x \leq M$ allora

$$0 < \frac{x\, n^{1-x}}{n^2 + x^2} \leq \frac{x}{n^{1+x}} \leq \frac{M}{n^{1+\delta}}$$

con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{1+\delta}} < \infty$. Per il Criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente su $[\delta, M]$.

Supponiamo ora $x \geq M$. Ricordiamo che

$$\frac{2nx}{x^2+n^2} \leq 1 \qquad \forall n \quad \forall x > 0$$

ovvero $\frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{2n}$. Dunque:

$$\frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \leq \frac{n^{1-x}}{2n} = \frac{1}{2n^x} \underset{x \geq M}{\overset{\text{se}}{\leq}} \frac{1}{2n^M}$$

Possiamo scegliere $M > 1$ e dire che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^M} < \infty$

Per il Criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme per $x \in [M, \infty)$.

Fino qui abbiamo provato questo: la serie converge uniformemente per $x \in [\delta, \infty)$, $\forall \delta > 0$.

Soluzione alternativa per la convergenza uniforme.

Partiamo dalla maggiorazione:

$$f_n(x) = \frac{x\, n^{1-x}}{n^2 + x^2} \leq x\, n^{-1-x} = g_n(x).$$

Studiamo la funzione $g_n(x)$. Sua derivata:

$$g_n'(x) = n^{-1-x} + x(-1)(\log n)\, n^{-1-x}$$
$$= n^{-1-x}\left(1 - x \log n\right)$$

Dunque $g_n'(x) \geq 0 \iff 1 - x \log n \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{\log n}$.

Fissiamo $\delta > 0$. Definitivamente si ha:

$$\frac{1}{\log n} < \delta.$$

Quindi definitivamente:

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) \leq \sup_{x \geq \delta} g_n(x) = g_n(\delta) = \frac{\delta}{n^{1+\delta}}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{n^{1+\delta}} < \infty$ per il Criterio di Weierstrass la serie data converge uniformemente su $[\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

Mostriamo che su $[0,\delta]$ non c'è convergenza uniforme. Per $0<x\leq 1$ si ha: $n^2+x^2 \leq 2n^2$ $\forall n$.

Quindi
$$\frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \geq \frac{n^{1-x}\cdot x}{2n^2} = \frac{x}{2\, n^{1+x}}.$$

Per il confronto integrale:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{1+x}}\, dt = \left[\frac{t^{-1-x+1}}{-x}\right]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{1}{x}$$

Quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2} \geq \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \geq \frac{x}{2}\cdot x^{-1} = \frac{1}{2}$$
per $x>0$

La funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^{1-x}}{n^2+x^2}, \quad x \geq 0,$$

non è pertanto continua per $x \to 0^+$ perché $f(0)=0$ mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq \frac{1}{2}$.