Analisi Matematica 2

Nome, cognome, matricola: Scritto del 28/8/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\}$ si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha xy - \log(x+y),$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) (4pt) Al variare di α, calcolare tutti i punti critici di f in A.

ii) (4pt) Calcolare tutti i valori di α tali che f sia convessa su A.

iii) (3pt) Al variare di α, stabilire se i punti critici sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) punti critici:	ii) f conv. per $\alpha \in$;
iii) estremi di f:	

Esercizio 2 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2 n^2 + n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) (2pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (2pt) Provare che $1 - e^{-t} \le t$ per ogni $t \ge 0$.

iii) (6pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$	; iii) CU per $x \in$

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \qquad \text{se} \qquad x^2 + y^2 \neq 0,$$

ed $f(0,0) = 0$. Consideriamo l'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \le 2\}$.

i) (4pt) Stabilire se K è chiuso.

ii) (5pt) Stabilire se K è compatto.

iii) (2pt) Stabilire se K è convesso.

Risposte: i) K chiuso:	; ii) K compatto:	; iii) K convesso:

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio. Si consideri l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$ e la funzione $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2+y^2+\alpha xy - \log(x+y)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f in A;

2) Calcolare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto A;

3) Al variare di α, stabilire se i punti critici trovati sono punti di min/max locale/assoluto.

Risoluzione. 1) Le derivate parziali di f sono:

$$f_x = 2x + \alpha y - \frac{1}{x+y},$$

$$f_y = 2y + \alpha x - \frac{1}{x+y}.$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$. Sottraendo le due equazioni troviamo

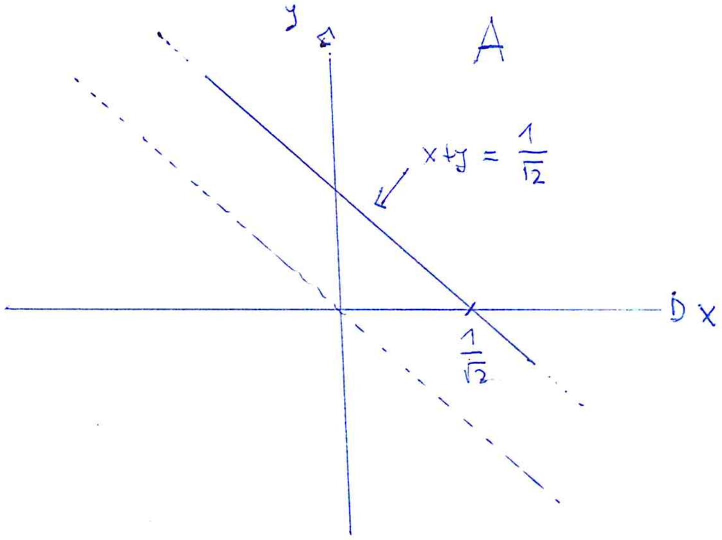
$$0 = f_x - f_y = 2(x-y) + \alpha(y-x) = (x-y)(2-\alpha)$$

Se $\alpha = 2$ questa equazione è vuota. Se $\alpha \neq 2$ si trova $x = y$.

Caso $\alpha = 2$. L'equazione $f_x = 0$ diventa

$$2(x+y) - \frac{1}{x+y} = 0 \iff (x+y)^2 = \frac{1}{2}$$

e quindi $x+y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (infatti $x+y>0$ e si sceglie + nella radice). Abbiamo una retta di punti critici:



Caso $\alpha \neq 2$. In questo caso $x=y$ e l'equazione $f_x = 0$ diventa

$$(2+\alpha)x - \frac{1}{2x} = 0 \quad \overset{(\alpha+2\neq 0)}{\iff} \quad x^2 = \frac{1}{2(2+\alpha)}$$

Se $2+\alpha \leq 0$ non ci sono soluzioni. Se $2+\alpha > 0$ si trova l'unico punto critico

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}} \right)$$

2) Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx} = 2 + \frac{1}{(x+y)^2}, \qquad f_{yy} = 2 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \alpha + \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Vediamo subito che la traccia della matrice Hessiana è positiva:

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = f_{xx} + f_{yy} = 4 + \frac{2}{(x+y)^2} > 0 .$$

Calcoliamo il determinante:

$$\det Hf(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$= \left(2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right)^2 - \left(\alpha + \frac{1}{(x+y)^2}\right)^2$$

$$= \left(2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2}\right)\left(2-\alpha\right)$$

Sappiamo che f è convessa su A se e solo se $Hf \geq 0$ su A, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} \operatorname{tr} Hf \geq 0 \quad \text{su } A \leftarrow \text{sempre verificata} \\ \det Hf \geq 0 \quad \text{su } A . \end{cases}$$

Vogliamo vedere per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si verifica

$$(2-\alpha)\left(2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2}\right) \geq 0 \quad \text{su tutto } A.$$

Osserviamo che se $2+\alpha < 0$ allora la quantità

$$2+\alpha + \frac{2}{(x+y)^2} \quad \text{cambia di segno su } A .$$

Quindi f non può essere convessa su A a meno che $2-\alpha = 0$ (nel qual caso $\det Hf \equiv 0$ su A).

Se invece $2+\alpha \geq 0$ allora $2+\alpha+\frac{2}{(x+y)^2} > 0$ su tutto A.
In questo caso:

$$\det Hf \geq 0 \text{ su } A \iff 2-\alpha \geq 0 .$$

Concludiamo che:

$$f \text{ è convessa su tutto } A \iff -2 \leq \alpha \leq 2 .$$

3) Quando $\alpha = 2$ c'è una retta di punti critici ed f è convessa in A. Quindi sono tutti punti di minimo assoluto.

Quando $\alpha > -2$ ed $\alpha \neq 2$ c'è un unico punto critico.
Se è anche $\alpha < 2$ allora f è convessa su tutto A e quindi questo punto critico è un punto (unico) di minimo assoluto stretto.

Rimane da studiare la natura del punto critico P quando $\alpha > 2$.
Nel punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}\right)$ si ha:

$$\det Hf(P) = \underbrace{(2-\alpha)}_{<0} \underbrace{\left(2+\alpha+\frac{2}{\left(2\frac{1}{\sqrt{2(2+\alpha)}}\right)^2}\right)}_{>0} < 0$$

Quindi P è un punto di sella.

$\square$

Esercizio Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2n^2+n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Discutere la convergenza puntuale della serie.

2) Provare che $1-e^{-t} \leq t$ per ogni $t \geq 0$.

3) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risoluzione. 1) per $x=0$ il termine generale della serie è identicamente nullo e la somma della serie è 0.

Per $x \neq 0$ si ha la seguente stima:

$$0 \leq \frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}x}}{x^2n^2+n} \leq \frac{1}{x^2n^2}$$

e poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ la serie data converge per confronto.

2) Sia $\phi(t) = t + e^{-t} - 1$. Chiaramente $\phi(0)=0$ e inoltre $\phi'(t) = 1-e^{-t} \geq 0$ per $t \geq 0$. Dunque ϕ cresce per $t \geq 0$ e quindi $\phi(t) \geq \phi(0) = 0$ per $t \geq 0$.

3) Usando il punto precedente si trova

$$\frac{1-e^{-\sqrt[3]{n}|x|}}{x^2n^2+n} \leq \frac{\sqrt[3]{n}|x|}{x^2n^2+n} := f_n(x).$$

Studiamo le funzioni $f_n(x)$. Per simmetria pari basta guardare il caso $x \geq 0$.

La derivata di $f_n(x)$ è $f_n'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{n}\,(x^2n^2+n) - \sqrt[3]{n}\,x\cdot 2xn^2}{(x^2n^2+n)^2} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{n}\,(n - x^2n^2)}{(x^2n^2+n)^2} = \frac{n^{4/3}\,(1-nx^2)}{(x^2n^2+n)^2}.$$

Dunque $f_n' \geq 0 \iff 1-nx^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \frac{1}{n}$

Deduciamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt[3]{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{n}\cdot n^2+n\right)} =$$

$$= \frac{1}{2n\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2\,n^{7/6}}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}} < \infty$, per il criterio di Weierstrass la serie data converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

$\square$

Esercizio Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0 , \end{cases}$$

e sia $K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 2 \}$.

1) Dire se K è chiuso.

2) Stabilire se K è compatto.

3) Stabilire se K è convesso.

Risoluzione. 1) Proviamo che f è continua in 0 (e quindi su tutto $\mathbb{R}^2$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2 (\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0$$

indipendentemente da θ in quanto $\cos^4\theta + \sin^4\theta \leq 1$.

Dunque $K = f^{-1}\Big(\underbrace{(-\infty, 2]}_{\text{chiuso di } \mathbb{R}}\Big)$ = chiuso in quanto anti-immagine di un chiuso con f continua.

2) Per il teorema di Heine - Borel basta vedere se K è limitato. Si ha $(x,y) \in K$ se e solo se

$$x^4 + y^4 \leq 2x^2 + 2y^2 \iff x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 \leq 0$$

$$\iff (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 \leq 2$$

L'ultima disequazione implica che:

$$(x^2-1)^2 \leq 2 \iff |x^2-1| \leq \sqrt{2} \implies x^2 \leq 1+\sqrt{2}$$

$$(y^2-1)^2 \leq 2 \quad \dots \implies y^2 \leq 1+\sqrt{2}$$

e dunque $K \subset \left[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right] \times \left[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$.

Dunque K è compatto.

3). Mostriamo che K non è convesso. Scegliamo $x = 1$ e risolviamo l'equazione $f(1,y) = 2$ ovvero

$$1 + y^4 = 2(1+y^2) \iff y^4 - 2y^2 - 1 = 0$$

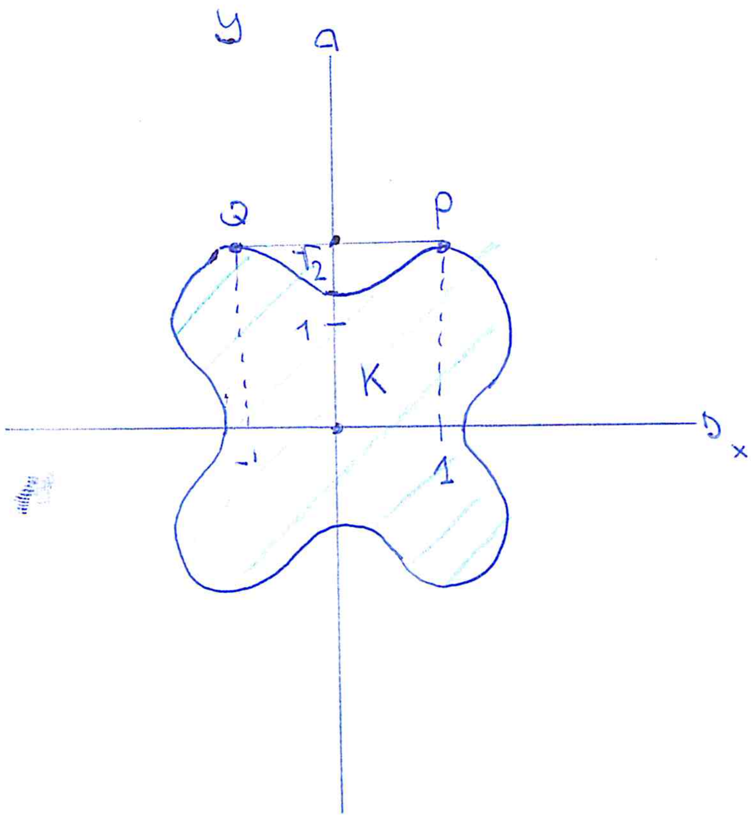
$$\iff y^2 = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$\iff y^2 = 1 + \sqrt{2}$$

Quindi i punti $P = (1, \sqrt{1+\sqrt{2}})$ e $\cancel{Q = (1, -\sqrt{1+\sqrt{2}})}$ $Q = (-1, \sqrt{1+\sqrt{2}})$ appartengono a K. Il punto medio

$$M = \frac{P+Q}{2} = (0, \sqrt{1+\sqrt{2}})$$

tuttavia non appartiene a K.



Infatti con $x = 0$ ed $y = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ si trova

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = y^2 = 1 + \sqrt{2} > 2$$