Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 9/7/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Dato il parametro $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^\beta.$$

i) (2pt) Calcolare le derivate parziali seconde di f.

ii) (3pt) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f.

iii) (3pt) Calcolare tutti i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

Risposte: ii) $\mathrm{tr}(Hf) =$ $\det(Hf) =$;
iii) f convessa su $\mathbb{R}^2$ per $\beta \in$

Esercizio 2 Sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4 + y^4} dx - \frac{yx^2}{x^4 + y^4} dy.$$

i) (3pt) Verificare che ω è chiusa in A.

ii) (3pt) Verificare che ω è esatta in A calcolandone un potenziale f.

iii) (2pt) Provare che il potenziale trovato verifica effettivamente $f \in C^1(A)$.

Risposte: ii) $f =$ (scrivere una formula completa)

Esercizio 3 (8pt) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^{\alpha x} + e^{(\alpha+1)x}} dx.$$

Risposte: Integrale converge per $\alpha \in$

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) (3pt) Calcolare il limite puntuale della successione $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

ii) (5pt) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Risposte: i) $f(x) =$; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

Analisi Matematica 2 — Tema B

Nome, cognome, matricola:

Scritto del 9/7/2018 – Canale 1

Esercizio 1 Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{\alpha/2}.$$

i) (2pt) Calcolare le derivate parziali seconde di f.

ii) (3pt) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f.

iii) (3pt) Calcolare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

Risposte: ii) $\operatorname{tr}(Hf) =$ $\qquad\qquad$ $\det(Hf) =$ $\qquad$;
iii) f convessa su $\mathbb{R}^2$ per $\alpha \in$

Esercizio 2 Sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = -\frac{xy^2}{x^4 + y^4}dx + \frac{yx^2}{x^4 + y^4}dy.$$

i) (3pt) Verificare che ω è chiusa in A.

ii) (3pt) Verificare che ω è esatta in A calcolandone un potenziale f.

iii) (2pt) Provare che il potenziale trovato verifica effettivamente $f \in C^1(A)$.

Risposte: ii) $f =$ $\qquad\qquad$ (scrivere una formula completa)

Esercizio 3 (8pt) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^{\beta x} + e^{(\beta+1)x}} dx.$$

Risposte: Integrale converge per $\beta \in$

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 + e^{-nx}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) (3pt) Calcolare il limite puntuale della successione $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

ii) (5pt) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Risposte: i) $f(x) =$ $\qquad\qquad$; ii) CU per $x \in$

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{\alpha}.$$

(i) Calcolare le derivate parziali seconde di f

(ii) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f

(iii) Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. (i) Derivate parziali prime:

$$f_x = \alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2x$$

$$f_y = \alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2y$$

Derivate seconde:

$$f_{xx} = \alpha(\alpha-1)\left(1+x^2+y^2\right)^{\alpha-2} 4x^2 + 2\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-1}$$

$$= (1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[4\alpha(\alpha-1)x^2 + 2\alpha\,(1+x^2+y^2)\right]$$

$$= 2\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[2(\alpha-1)x^2 + 1 + x^2+y^2\right]$$

$$f_{yy} = 2\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[2(\alpha-1)y^2 + 1 + x^2+y^2\right]$$

$$f_{xy} = \alpha(\alpha-1)\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\,4xy$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

(ii) Traccia matrice Hessiana

$$\operatorname{tr} Hf = f_{xx} + f_{yy}$$

$$= 2\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[2(\alpha-1)(x^2+y^2) + 2(1+x^2+y^2)\right]$$

$$= 4\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[(\alpha-1)(x^2+y^2) + 1 + x^2+y^2\right]$$

$$= 4\alpha\,(1+x^2+y^2)^{\alpha-2}\left[\alpha(x^2+y^2) + 1\right]$$

Determinante matrice Hessiana

$$\det Hf = f_{xx}\,f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$= 4\alpha^2\,(1+x^2+y^2)^{2\alpha-4}\left[2(\alpha-1)x^2 + 1+x^2+y^2\right]\left[2(\alpha-1)y^2 + 1+x^2+y^2\right] -$$

$$- 16\alpha^2(\alpha-1)^2\,(1+x^2+y^2)^{2\alpha-4}\,x^2y^2$$

$$= 4\alpha^2\,(1+x^2+y^2)^{2\alpha-4}\left[(1+x^2+y^2)\,2(\alpha-1)(x^2+y^2) + (1+x^2+y^2)^2\right]$$

$$= 4\alpha^2\,(1+x^2+y^2)^{2\alpha-3}\left[2(\alpha-1)(x^2+y^2) + 1 + x^2+y^2\right]$$

$$= 4\alpha^2\,(1+x^2+y^2)^{2\alpha-3}\left[1 + (2\alpha-1)(x^2+y^2)\right]$$

(iii) f convessa su $\mathbb{R}^2 \iff Hf \geq 0$ su $\mathbb{R}^2 \iff \begin{matrix}\det Hf \geq 0\\ \operatorname{tr} Hf \geq 0\end{matrix}$ su $\mathbb{R}^2$.

Si ha $\det Hf \geq 0$ su $\mathbb{R}^2 \iff 2\alpha - 1 \geq 0 \iff \alpha \geq \frac{1}{2}$

Per questi α si ha anche $\operatorname{tr} Hf \geq 0$ su $\mathbb{R}^2$.

Quindi: f convessa su $\mathbb{R}^2 \iff \alpha \geq \frac{1}{2}$, oppure $\alpha = 0$.

$\square$

Infatti per $\alpha = 0$ si ha $f \equiv 1$.

ESERCIZIO Su $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0 \}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4+y^4}\, dx - \frac{yx^2}{x^4+y^4}\, dy .$$

(i) Verificare che ω è chiusa in A.

(ii) ~~Verifica~~ Provare che ω è esatta esibendo un potenziale f di ω in A. (Il potenziale deve essere definito in ogni punto di A)

Risoluzione. (i) Verifichiamo che ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2}{x^4+y^4}\right) = \frac{2xy(x^4+y^4) - xy^2 \cdot 4y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-yx^2}{x^4+y^4}\right) = -\frac{2xy(x^4+y^4) - yx^2 \cdot 4x^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4+y^4)^2}$$

Le due espressioni sono identiche su A.

(ii) Cerchiamo $f \in C^1(A)$ tale che

$$\circledast \qquad f_x = \frac{xy^2}{x^4+y^4}, \qquad f_y = -\frac{yx^2}{x^4+y^4}.$$

Integriamo la prima equazione in x (integr. indefiniti)

$$f(x,y) = \int \frac{xy^2}{x^4+y^4}\, dx \underset{2x\,dx = d\xi}{\overset{x^2=\xi}{=}} \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{\xi^2+y^4}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{\xi}{y^2}\right)^2+1}\, d\xi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{y^2}\right) + C(y)$$

È dunque $f(x,y) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + c(y)$,

Deriviamo in y:

$$f_y = \frac{1}{2} \frac{x^2(-2)y^{-3}}{1+\frac{x^4}{y^4}} + c'(y)$$

$$= \frac{y x^2}{x^4+y^4} + c'(y)$$

Confrontandolo con la seconda equazione in ⊛ si trova $c'(y)=0$ e quindi c = costante.

Abbiamo trovato (con $c=0$) il potenziale

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right).$$

Questo ancora non basta perché f è definita solo per $y \neq 0$. Tuttavia: per $x_0 \neq 0$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Quindi possiamo definire

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } y = 0 \text{ e } x \neq 0 \end{cases}$$

Risulta $f \in C(A)$ e per la ⊛ in effetti $f \in C^1(A)$.

ESERCIZIO Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 + e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ ed } n \in \mathbb{N},$$

(i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Studiare la convergenza uniforme della successione.

Risoluzione (i) Primo caso: $x \le 0$; si ha:

$$\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+e^{nx}} \le \sqrt[n]{n^2+1} \le \sqrt[n]{n^2+n^2} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2}$$

$$\sqrt[n]{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \qquad \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Per confronto: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ se $x \le 0$.

Secondo caso: $x > 0$, In questo caso si ha definitivamente $n^2 \le e^{nx}$ e quindi

$$e^x = \sqrt[n]{e^{nx}} \le \sqrt[n]{n^2+e^{nx}} \le \sqrt[n]{e^{nx}+e^{nx}} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{e^{nx}} = \sqrt[n]{2}\, e^x$$

E quindi per confronto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ per $x>0$.

Dunque

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \le 0 \\ e^x & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

(ii) Studiamo la convergenza uniforme su $(-\infty, 0]$:

$$\sup_{x\le 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \le 0}\left(\sqrt[n]{n^2+e^{nx}} - 1\right) \underset{\Delta}{=} \sqrt[n]{n^2+1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

in questo $x \mapsto \sqrt[n]{n^2+e^{nx}}$ è crescente.

ESERCIZIO Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice del seguente integrale

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^{\alpha x} + e^{(\alpha+1)x}} \, dx .$$

Risoluzione. Facciamo il cambio di variabile $e^x = t$, $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t} dt$, $x = -\infty \to t = 0$ e $x = +\infty \to t = +\infty$.

Si trova

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha+1}} \frac{1}{t} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}(1+t)} dt .$$

Studiamo la convergenza su $[0,1]$ e poi su $[1,\infty)$.

1) L'integrale

(1) $$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}(1+t)} dt$$

si studia con il confronto asintotico usando $\sin t = t + o(t)$.

L'integrale di confronto è

$$\int_0^1 \frac{t}{t^{\alpha+1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt < \infty \iff \alpha < 1 .$$

Quindi (1) converge se e solo se $\alpha < 1$.

2) L'integrale

(2) $$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}(1+t)}\, dt$$

si studia col Criterio di Abel: $f(t) = \sin t$ ha primitiva limitata. Esaminiamo

$$g(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}(1+t)}.$$

Se $\alpha+1+1>0$ ($\Longleftrightarrow \alpha>-2$) allora $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}(1+t)} = 0$.

Inoltre

$$g'(t) = \frac{-\left[(\alpha+1)t^{\alpha}(1+t) + t^{\alpha+1}\right]}{t^{2\alpha+2}(1+t)^2}$$

verifica definitivamente $g'(t)<0$ quando $\alpha>-2$.

Quindi per il Criterio di Abel l'integrale (2) converge per $\alpha>-2$.

Risposta complessiva: l'integrale I_α converge per $-2<\alpha<1$.

□

Quindi c'è conv. uniforme su $(-\infty, 0]$.

Studiamo il caso $x \geq 0$. Dobbiamo esaminare:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt[n]{n^2 + e^{nx}} - e^x\right|$$

$$= \sqrt[n]{n^2+e^{nx}} - e^x = (n^2+e^{nx})^{\frac{1}{n}} - e^x.$$

Sua derivata:

$$g_n'(x) = \frac{1}{n}(n^2+e^{nx})^{\frac{1}{n}-1} e^{nx} \cdot n - e^x$$

$$= e^{nx}(n^2+e^{nx})^{\frac{1-n}{n}} - e^x$$

Studio del segno:

$$g_n'(x) \leq 0 \iff e^{nx}(n^2+e^{nx})^{\frac{1-n}{n}} \leq e^x$$

$$\iff e^{n^2x}(n^2+e^{nx})^{1-n} \leq e^{nx}$$

$$\iff e^{n^2x-nx} \leq (n^2+e^{nx})^{n-1}$$

$$\iff e^{(n^2-n)x} \leq e^{(n^2-n)x}\left(1+\frac{n^2}{e^{nx}}\right)^{n-1}$$

$$\iff 1 \leq \left(1+\frac{n^2}{e^{nx}}\right)^{n-1}$$

VERIFICATO.

Quindi g_n è decrescente. Dunque:

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = g_n(0) = \sqrt[n]{n^2+1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Risposta: c'è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.