Analisi Matematica 2 — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 17/6/2019 – Canale 1

Esercizio 1 Dato un parametro reale $\alpha \geq 0$, si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha} + t^{\alpha-1}} dt.$$

i) (7pt) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga semplicemente.

ii) (3pt) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale converga assolutamente.

Risposte: i) CS per $\alpha \in$ $]0,3[$	; ii) CA per $\alpha \in$ $]1,3[$

Esercizio 2 Si consideri la curva nel piano $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\frac{2t}{1+t^2}, (t-1)^2\Big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

i) (2pt) Discutere la regolarità e calcolare il campo tangente unitario T.

ii) (2pt) Calcolare i limiti $T^{\pm} = \lim_{t \to 1^{\pm}} T(t)$.

iii) (7pt) Disegnare il supporto della curva, con precisione intorno al punto $(1,0) \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) $T =$ VEDI SOL.	; ii) $T^{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$	; iii) Disegno: VEDI SOL

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = -\frac{x}{2} + \sqrt{1 + x^2 + xy + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) (3pt) Calcolare tutti i punti critici di f .

ii) (3pt) Calcolare le derivate seconde di f.

iii) (3pt) Stabilire se f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

iv) (1pt) Stabilire se i punti critici sono punti di min/max locale/assoluto.

Risposte: i) p.ti critici: $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$	ii) der. seconde: VEDI SOL.
iii) convessa su $\mathbb{R}^2$: si/no Sì	iv) min/max: min Assoluto

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Dato un parametro reale $\alpha \geq 0$, si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}}\,dt$$

1) Calcolare gli $\alpha \geq 0$ per cui l'integrale converge semplicemente

2) Calcolare gli $\alpha \geq 0$ per cui converge assolutamente.

Risoluzione. 1) Integrale su $[0,1]$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}}\,dt$$

Qui CS e CA sono equivalenti. Usiamo il confronto asintotico per $t \to 0^+$. Abbiamo $\sin t = t + o(t) = t(1+o(1))$ e quindi

$$\frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}} = \frac{t\,(1+o(1))}{t^{\alpha-1}\,(t+1)} = \frac{1}{t^{\alpha-2}}\,(1+o(1))$$

Dunque l'integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-2}}\,dt < \infty \iff \alpha - 2 < 1 \iff \alpha < 3.$$

Integrale su $[1,\infty)$:

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha + t^{\alpha-1}}\,dt$$

Osserviamo che $f(t) = \sin t$ ha primitiva limitata.
Studiamo $\phi(t) = t^\alpha + t^{\alpha-1}$ con $\phi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} + (\alpha-1) t^{\alpha-2}$

Se $\alpha = 0$ abbiamo $\phi' < 0$. Se $\alpha > 0$ abbiamo
che definitivamente $\phi'(t) > 0$ e inoltre $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = +\infty$.
Quindi per $\alpha > 0$ la funzione $g(t)$ è decrescente
ed infinitesima.

Per Abel-Dirichlet abbiamo che I_2 converge
quando $\alpha > 0$.
Per $\alpha = 2$ si ha

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{t \sin t}{1+t}\, dt = \underbrace{\underbrace{\int_1^\infty \sin t\, dt}_{\text{non converge}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{-\sin t}{1+t}\, dt}_{\text{converge}}}_{\text{non converge}}$$

Risposta: CS $\iff$ $0 < \alpha < 3$.

2) Studiamo la CA su $[1, \infty)$:

$$I_3 = \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^\alpha + t^{\alpha-1}}\, dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\, dt < \infty$$
se $\alpha > 1$.

Per confronto: $\alpha > 1 \Rightarrow I_3$ converge.
Per $0 \leq \alpha \leq 1$ I_3 non converge (dettagli omessi).

Risposta: CA $\iff$ $1 < \alpha < 3$.

ESERCIZIO Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, (t-1)^2 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i) Discutere la regolarità di γ e calcolare il campo tangente unitario T

ii) Calcolare i limiti $\lim_{t \to 1^\pm} T(t) = T^\pm$

iii) Disegnare il supporto della curva.

Risoluzione. i) Derivata

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2}, 2(t-1) \right)$$

$$= \left(\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\ 2(t-1) \right) = 2(t-1) \left(\frac{-1-t}{(1+t^2)^2}, 1 \right)$$

Vediamo che $t=1$ è l'unico punto dove $\dot{\gamma}(t) = (0,0)$.

Per $t \neq 1$ si ha

$$T = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{2(t-1)}{|2(t-1)|} \cdot \frac{\left(-\frac{t+1}{(1+t^2)^2}, 1 \right)}{\sqrt{\frac{(t+1)^2}{(1+t^2)^4} + 1}}$$

$$= \frac{t-1}{|t-1|} \frac{\left(-(t+1), (1+t^2)^2 \right)}{\sqrt{(t+1)^2 + (1+t^2)^4}}$$

ii) limiti:

$$T^+ = \lim_{t\to 1^+} T(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{(-(t+1),\ (1+t^2)^2)}{\sqrt{(t+1)^2+(1+t^2)^4}} = \frac{(-2,4)}{\sqrt{4+16}}$$

$$= \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}$$

e analogamente $\quad T^- = -T^+ = \dfrac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$

iii) Esprimiamo il supporto di γ come unione di due grafici cartesiani. Facciamo questa riparametrizzazione:

$$(t-1)^2 = s \geq 0 \iff t-1 = \pm\sqrt{s}$$

1° caso: $t = 1+\sqrt{s}$ 2° caso: $t = 1-\sqrt{s}$, sempre con $s\geq 0$.

1° caso, La prima coordinata di γ è

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2(1+\sqrt{s})}{1+(1+\sqrt{s})^2} = f(s)$$

Si ha $f(0) = 1$ ed $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$. Derivata:

$$f'(s) = \frac{\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{s}}\left[1+(1+\sqrt{s})^2\right] - 2(1+\sqrt{s})\,\cancel{2}(1+\sqrt{s})\,\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{s}}}{\left[1+(1+\sqrt{s})^2\right]^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{s}}\left[1+(1+\sqrt{s})^2 - 2(1+\sqrt{s})^2\right]}{[\quad]^2} = \frac{1-(1+\sqrt{s})^2}{\sqrt{s}\,[\quad]^2} \leq 0$$

Dunque f è decrescente.

2° caso: $t = 1-\sqrt{s}$. La prima coordinata è:

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2(1-\sqrt{s})}{1+(1-\sqrt{s})^2} = g(s)$$

Si ha $g(0) = 1$ e $\lim_{s \to \infty} g(s) = 0$. Derivata:

$$g'(s) = \frac{-\cancel{2}\,\cancel{\tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{s}}\left[1+(1-\sqrt{s})^2\right] + 2(1-\sqrt{s})\,\cancel{2}(1-\sqrt{s})\,\cancel{\tfrac{1}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{s}}}{\left[1+(1-\sqrt{s})^2\right]^2}$$

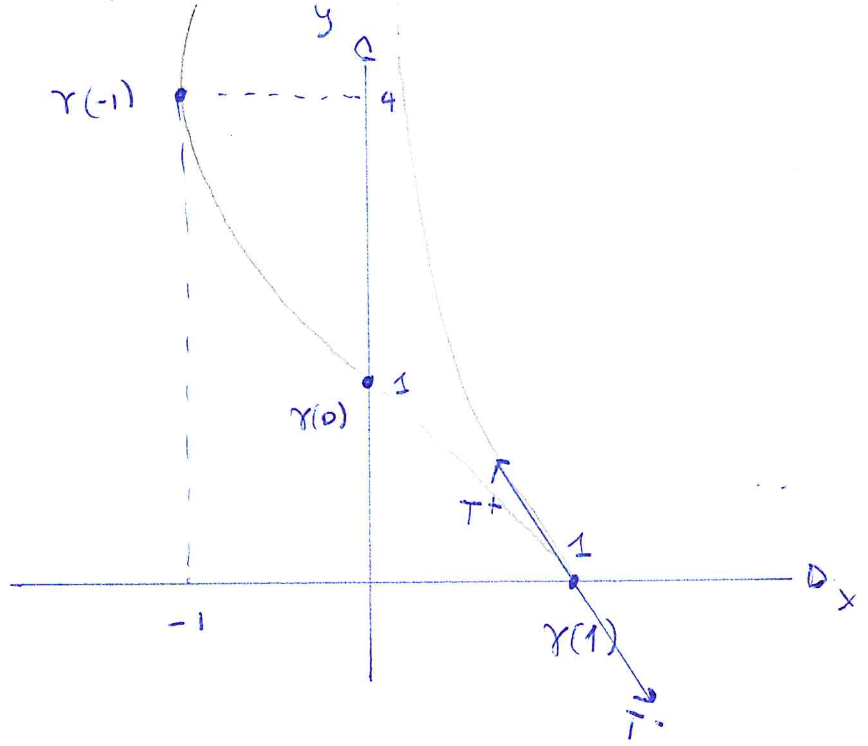
$$= \frac{-1-(1-\sqrt{s})^2 + 2(1-\sqrt{s})^2}{\sqrt{s}\,[\ldots]^2} = \frac{(1-\sqrt{s})^2 - 1}{\sqrt{s}\,[\ldots]^2}$$

$$= \frac{s - 2\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,[\ldots]^2} = \frac{\sqrt{s}-2}{[\ldots]^2}$$

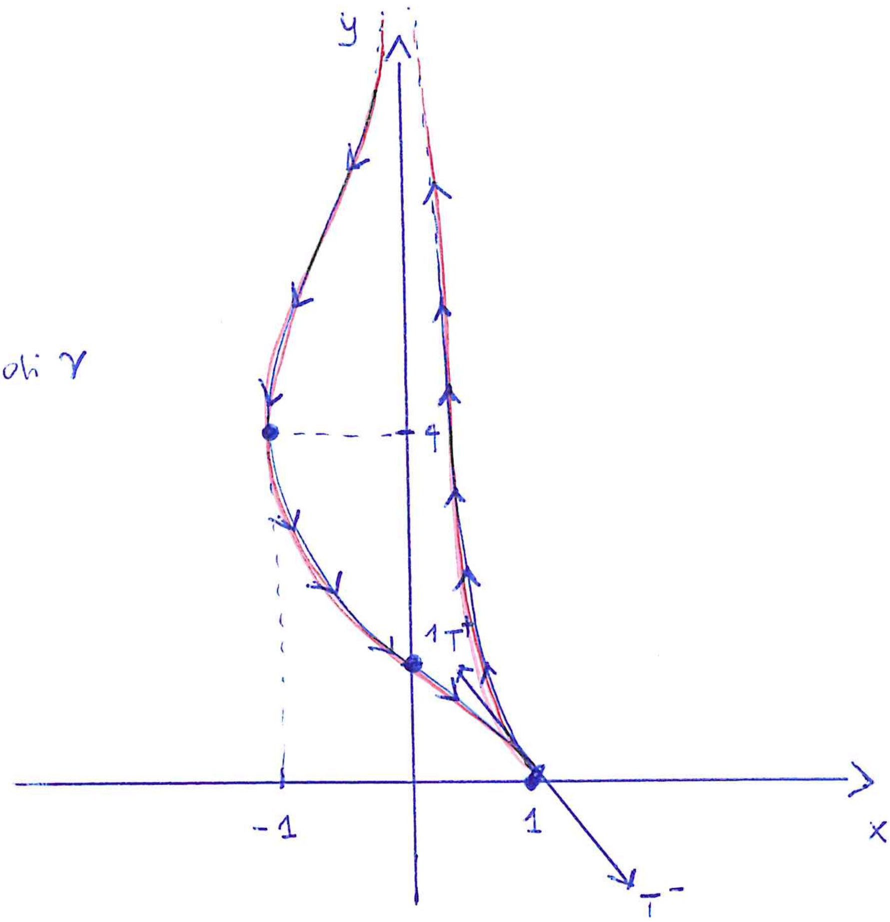
Dunque $g'(s) \geq 0$ per $s \geq 4$ e $g'(s) \leq 0$ per $s \in [0,4]$

$s = 4 \iff t = -1$

$\gamma(-1) = (-1, 4)$



supporto di γ



ESERCIZIO Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = -\frac{x}{2} + \sqrt{1+x^2+xy+y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Calcolare i punti critici di f.

2) Calcolare le derivate seconde di f.

3) Stabilire se f è convessa su $\mathbb{R}^2$.

4) Studiare la natura dei punti critici.

Risoluzione 1) Derivate parziali:

$$f_x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2x+y}{\sqrt{\ldots}}$$

$$f_y = \frac{1}{2} \frac{x+2y}{\sqrt{\ldots}}$$

Risolvo il sistema $\nabla f = (0,0)$. La seconda equazione fornisce $0 = f_y \Rightarrow x+2y=0$ ovvero $y = -\frac{x}{2}$.
Sostituiamo in $f_x = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2x - \frac{x}{2}}{\sqrt{1+x^2+x\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{4}}}$$

da cui

$$0 = -\sqrt{1+x^2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} + x\left(2-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{1+\frac{3}{4}x^2} = \frac{3}{2}x$$

Vediamo che deve essere $x>0$.

Passando ai quadrati: $1 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{4}x^2 \iff \frac{6}{4}x^2 = 1$

da cui si trova ~~$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$~~ $x^2 = \frac{2}{3}$ e quindi $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

e quindi $y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. C'è un solo punto critico.

2) $$f_{xx} = \frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{\ldots} - (2x+y)\frac{1}{2}\frac{2x+y}{\sqrt{\ldots}}}{\left[\sqrt{\quad}\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2(1+x^2+xy+y^2) - \frac{1}{2}(2x+y)^2}{\left[\sqrt{\ldots}\right]^3}$$

$$= \frac{2 + \cancel{2x^2} + \cancel{2xy} + 2y^2 - \cancel{2x^2} - \cancel{2xy} - \frac{y^2}{2}}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3}$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{2}y^2}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3}$$

Per simmetria:

$$f_{yy} = \frac{2 + \frac{3}{2}x^2}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3}.$$

Infine

$$f_{xy} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\ldots} - (2x+y)\frac{1}{2}\frac{x+2y}{\sqrt{\ldots}}}{\left[\sqrt{\ldots}\right]^2}$$

$$= \frac{1+x^2+xy+y^2 - \frac{1}{2}(2x+y)(x+2y)}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3}$$

$$= \frac{1+\cancel{x^2}+xy+\cancel{y^2} - \cancel{x^2} - \frac{5}{2}xy - \cancel{y^2}}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3} = \frac{1 - \frac{3}{2}xy}{2\left[\sqrt{\ldots}\right]^3}$$

3) La matrice Hessiana è fatta così:

$$Hf(x,y) = \frac{1}{2[\sqrt{\dots}]^3} \begin{bmatrix} 2+\frac{3}{2}y^2 & 1-\frac{3}{2}xy \\ 1-\frac{3}{2}xy & 2+\frac{3}{2}x^2 \end{bmatrix}$$

Vediamo che $\operatorname{tr} Hf(x,y) = \frac{1}{2[\sqrt{\dots}]^3}\left(4+\frac{3}{2}(x^2+y^2)\right) > 0$

Il determinante è

$$\det Hf(x,y) = \frac{1}{4[\sqrt{\dots}]^6}\left(\left(2+\frac{3}{2}x^2\right)\left(2+\frac{3}{2}y^2\right) - \left(1-\frac{3}{2}xy\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4[\sqrt{\dots}]^6}\left(4+3(x^2+y^2)+\cancel{\frac{9}{4}x^2y^2} - 1 - \cancel{\frac{9}{4}x^2y^2} + 3xy\right)$$

$$= \frac{1}{4[\sqrt{\dots}]^6}\, 3\left(1+x^2+y^2+xy\right)$$

$$= \frac{3}{4\left(1+x^2+xy+y^2\right)^2} > 0$$

Quindi f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.

4) Il punto critico è un punto di minimo assoluto (per la convessità).

$\square$