Analisi 2 – Canale 1

Nome, cognome, matricola: Scritto del 17/7/2019

Esercizio 1 Per $x > 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{nx}.$$

i) (4pt) Studiare la convergenza puntuale della serie.

ii) (4pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: i) CP per $x \in$; ii) CU per $x \in$

Esercizio 2 Dato un parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \frac{\sin(x|y|^\alpha)}{x^2+y^4}, \qquad \text{se } x^2+y^4 \neq 0,$$

ed $f(0,0) = 0$.

i) (5pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.

ii) (5pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risposte: i) f cont. per $\alpha \in$; ii) f diff. per $\alpha \in$

Esercizio 3 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + \alpha y + \log(1+x^2+y^2).$$

Al variare di $\alpha > 0$ rispondere alle seguenti domande:

i) (2pt) Calcolare le soluzioni dell'equazione $\alpha y^2 + 2y + \alpha = 0$, quando esistono.

ii) (3pt) Per quali α esistono rispettivamente due, uno o nessun punto critico di f?

iii) (3pt) Calcolare traccia e determinante della matrice Hessiana di f in un generico punto del tipo $(0,y) \in \mathbb{R}^2$.

iv) (4pt) Stabilire se i punti critici di f sono punti di min/max locale/globale, punti di sella, oppure nessuno dei precedenti.

Risposte: i) $y =$	ii) punti critici:
iii) $Hf(0,y) =$	iv) ...

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Per $x>0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{nx}, \qquad x>0.$$

i) Studiare la convergenza semplice.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione. i) È una serie a termini positivi. Usiamo il criterio del confronto asintotico:

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{per } t \to 0.$$

Dunque

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n}\left(1+o(1)\right)$$

per $n \to \infty$

Dunque

$$\frac{1}{nx}\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right) \quad \text{per } n \to \infty$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ segue che la serie converge $\forall x>0$

ii) Usiamo il criterio di Weierstrass. Sappiamo che $\log(1+t) \leq t \quad \forall t>-1$. Dunque

$$0 \leq \frac{1}{nx}\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x>0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

Dunque c'è CU su tutto $(0,\infty)$. $\square$

ESERCIZIO Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|y|^\alpha)}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ per cui f sia continua in $(0,0)$.

ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ per cui f sia differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione i) Conviene guardare la funzione lungo curve dove x^2 e y^4 hanno lo stesso ordine di infinitesimo. Ad esempio $x = t^2$ ed $y = mt$ con $m \in \mathbb{R}$ parametro e $t \to 0^+$. Si ha

$$f(t^2, mt) = \frac{\sin(t^{2+\alpha}|m|^\alpha)}{t^4(1+m^4)} , \qquad t > 0$$

Dunque

$$\lim_{t \to 0^+} f(t^2, mt) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2+\alpha > 4 \iff \alpha > 2 \\ |m|^\alpha & \text{se } \alpha = 2 \\ \text{non esiste finito} & \text{se } \alpha < 2 . \end{cases}$$

Quindi:

$$\alpha \leq 2 \implies f \text{ } \underline{\text{NON}} \text{ continua in } (0,0).$$

Proviamo che per $\alpha > 2$ f è continua in $(0,0)$:

$$\left|\frac{\sin(x|y|^\alpha)}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{|x|\,|y|^\alpha}{x^2+y^4} \leq \frac{(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^4)^{\frac{\alpha}{4}}}{x^2+y^4} =$$

$$= (x^2+y^4)^{\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\text{per } \alpha>2} 0 .$$

ii) Per $xy = 0$ (assi) si ha $f \equiv 0$.
Quindi $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Il test della differenziabilità è dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{\sin(x|y|^\alpha)}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}}}_{g(x,y)} \overset{?}{=} 0 .$$

Proviamo come sopra con $x = t^2$ e $y = mt$:
$(t>0)$

$$g(t^2, mt) = \frac{\sin(t^{2+\alpha}|m|^\alpha)}{t^4(1+m^4)\,t\sqrt{t^2+m^2}}$$

Con $m \neq 0$ vediamo che

$$2+\alpha \leq 5 \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} g(t^2, mt) \neq 0$$

Dunque si ha certamente:

$$\alpha \leq 3 \implies f \text{ NON è differenziabile in } (0,0).$$

Cerchiamo di vedere se per $\alpha > 3$ si ha differenziabilità:

$$|g(x,y)| \leq \frac{|x|\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\text{usato: } |\sin t| \leq |t|)$$

Qui non è chiaro come procedere con le stime.

Primo tentativo:

$$\frac{|x|\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq\, 1} \cdot \underbrace{\frac{|y|^{\alpha}}{x^2+y^4}}_{\leq\, \frac{|y|^{\alpha}}{y^4} = |y|^{\alpha-4}} \leq |y|^{\alpha-4}$$

Deduciamo che

$$\alpha > 4 \implies f \text{ è differenziabile in } (0,0).$$

Purtroppo non sembra bastare.

Secondo tentativo:

$$\frac{|x|\,|y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \cdot \frac{|x|\,|y|^{\alpha-1}}{x^2+y^4} \leq$$

$$\leq \frac{(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}\,(x^2+y^4)^{\frac{\alpha-1}{4}}}{(x^2+y^4)} = (x^2+y^4)^{\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{4}}$$

Questo prova che

$$\alpha > 3 \implies f \text{ è differenziabile in } (0,0).$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro dato e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + \alpha y + \log(1+x^2+y^2).$$

Nel compito: solo $\alpha > 0$

i) Al variare di α ~~studiare~~ calcolare tutti i punti critici di f.

ii) Dire se i punti critici trovati sono punti di max\min locale\globale.

Risoluzione i) Le derivate parziali di f sono

$$\begin{cases} f_x = 2x + \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}, \\ f_y = \alpha + \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$, Abbiamo

$$f_x = 0 \iff x = 0.$$

Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si trova

$$0 = \alpha + \frac{2y}{1+y^2} = \frac{\alpha(1+y^2) + 2y}{1+y^2}$$

e si arriva alla equazione $\alpha y^2 + 2y + \alpha = 0$.

Per $\alpha = 0$ c'è la sola soluzione $y = 0$.

Il discriminante del polinomio è $\Delta = 4 - 4\alpha^2 = 4(1-\alpha^2)$.
Dunque $\Delta < 0 \iff |\alpha| > 1$. In questo caso non ci sono soluzioni e quindi non ci sono punti critici. Se $|\alpha| = 1$ si ha $\Delta = 0$ e si trova la soluzione doppia $y = -1$ quando $\alpha = +1$ ed $y = +1$ quando $\alpha = -1$.

Studiamo il caso $0 < |\alpha| < 1$. Si trovano due soluzioni:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}.$$

Dunque:

$\alpha = 0$ unico p.to critico $P = (0,0)$

$\alpha = 1$ " " " $P = (0,-1)$

$\alpha = -1$ " " " $P = (0,+1)$

$0 < |\alpha| < 1$ due punti critici $P_\pm = \left(0, \frac{-1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)$.

ii) Dobbiamo studiare la matrice Hessiana in questi punti critici. Derivate seconde:

$$f_{xx} = 2 + 2\frac{1+x^2+y^2 - 2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 2 + 2\frac{1 - x^2 + y^2}{(\;\cdots\;)^2}$$

$$f_{yy} = 2\,\frac{1+x^2+y^2 - 2y^2}{(\;\cdots\;)^2} = 2\,\frac{1 + x^2 - y^2}{(\;\cdots\;)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{-4xy}{(\dots)^2}$$

Nel caso che $x=0$ queste formule si semplificano e troviamo

$$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2 + 2\dfrac{1+y^2}{(1+y^2)^2} & 0 \\ & \\ 0 & 2\dfrac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Vediamo subito che

$$\operatorname{tr} Hf(0,y) = 2 + \frac{4}{(1+y^2)^2} > 0 \quad \forall y.$$

Inoltre:

$$\det Hf(0,y) \geq 0 \iff 1-y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq 1.$$

Prime conclusioni:

i) Se $\alpha = 0$, $P=(0,0)$ verifica $Hf(0,0) > 0$ e quindi è un minimo locale stretto.

2) Se $\alpha = \pm 1$ il punto critico è $(0, \mp 1)$.
Sfortunatamente si trova $\det Hf(0, \pm 1) = 0$, cosa che non permette di dedurre nulla.

Studiamo meglio

$$f_y(0,y) = \pm 1 + \frac{2y}{1+y^2}$$

$$= \pm \frac{1+y^2 \pm 2y}{1+y^2} = \pm \frac{(1 \pm y)^2}{1+y^2}$$

Vediamo che $f_y(0,y)$ ha segno costante.
Quindi $y \longmapsto f(0,y)$ è monotona.
Quindi i punti $(0, \mp 1)$ non sono né min né max locali.

3) Rimane il caso $0 < |\alpha| < 1$. In questo caso si ha $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$ e quindi

$$y^2 = \frac{1+1-\alpha^2 \mp 2\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2}$$

Studiamo la disequazione $y^2 < 1$:

$$\frac{2-\alpha^2 \mp 2\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2} < 1 \iff 1-\alpha^2 \mp \sqrt{1-\alpha^2} < 0$$

Col segno $-$ si trova:

$$1-\alpha^2 - \sqrt{1-\alpha^2} < 0 \iff 1-\alpha^2 < \sqrt{1-\alpha^2}$$
$$\iff \sqrt{1-\alpha^2} < 1$$
$$\iff 1-\alpha^2 < 1$$
$$\iff \alpha^2 > 0 \qquad \text{VERO.}$$

Quindi il punto critico col segno $-$ è un minimo locale.

Col segno $+$ si trova

$$1-\alpha^2 + \sqrt{1-\alpha^2} < 0 \qquad \text{FALSO}$$

In effetti si ha $1-\alpha^2 + \sqrt{1-\alpha^2} > 0$, che vuol dire che il determinante è strettamente negativo.

Quindi il punto critico col segno $+$ è un punto di sella.

$\square$

Osserviamo che per $\alpha \neq 0$ e con $x = 0$ si ha $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = \pm\infty$ con segno opposto

Quindi f non ha minimi assoluti per $\alpha \neq 0$

Per $\alpha = 0$, $P = (0,0)$ è chiaramente un minimo assoluto.

$\square$