<u>Esercizio</u> Sia $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log^2(x/2)} \sin(\log x) & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Provare che $f \in AC([0,1])$.

Soluzione. Siccome $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

f è continua su $[0,1]$. Chiaramente $f \in C^\infty(]0,1])$.

Dunque se $0 < y < x \leq 1$ si ha

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\, dt$$

Se la formula vale anche per $y = 0$, allora $f \in AC([0,1])$

Se $f' \in L^1(0,1)$ allora certamente

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Calcolo:

$$f'(x) = -\frac{2}{x}\left(\log(x/2)\right)^{-3} \sin(\log x) + \frac{1}{x \log^2(x/2)} \cos(\log x)$$

$0 < x \leq 1$

Osserviamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{x \log^2(x/2)}\, dx = \left[-\left(\log(x/2)\right)^{-1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\log 2} < \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x\,|\log(x/2)|^3}\, dx = -\left[-\left(\log(x/2)\right)^{-2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(\log 2)^2} < \infty$$

Segue che $|f'(x)| \leq \frac{2}{x} \frac{1}{|\log(x/2)|^3} + \frac{1}{x \log^2(x/2)} \in L^1(0,1)$

$\square$

<u>Esercizio</u> Siano $E, E_n \subset [0,1]$ insiemi misurabili siano $f = \chi_E$ ed $f_n = \chi_{E_n}$, sia $1 \leq p < \infty$.

Provare che sono equivalenti:

A) $f_n \to f$ in $L^p(0,1)$ forte

B) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$ debole

Soluzione. A) $\Rightarrow$ B) sempre vera.

B) $\Rightarrow$ A). Osservo che per ogni $1 \leq p < \infty$ si ha

$$|\chi_{E_n} - \chi_E|^p = |\chi_{E_n} - \chi_E|^2 = \chi_{E_n}^2 - 2\chi_{E_n}\chi_E + \chi_E^2 =$$

$$= \chi_{E_n} - 2\chi_{E_n}\chi_E + \chi_E$$

Siccome $f = \chi_E \in L^p(0,1)$ $\forall p \in [1,\infty)$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \chi_{E_n}\chi_E \, dx = \int_{[0,1]} \chi_E \chi_E \, dx = \int_{[0,1]} \chi_E \, dx$$

$$= \mathcal{L}^1(E)$$

Siccome $1 \in L^p(0,1)$ $\forall p \in [1,\infty)$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \chi_{E_n} dx = \int_{[0,1]} \chi_E \, dx = \mathcal{L}^1(E)$$

In conclusione:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |\chi_{E_n} - \chi_E|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \left(\chi_{E_n} - 2\chi_{E_n}\chi_E + \chi_E\right) dx$$

$$= \mathcal{L}^1(E) - 2\mathcal{L}^1(E) + \mathcal{L}^1(E) = 0$$

$\square$

Esercizio Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\log(x+t)}{t+1}\, dt, \qquad x \in [0,1]$$

i) Provare che $f \in C([0,1])$;

ii) Provare che f è derivabile su $]0,1]$;

iii) Stabilire se $f' \in L^1(0,1)$.

Soluzione. i) Osserviamo che per $t>0$ e per $x>0$

$$\log(t) \leq \log(x+t)$$

Ed in particolare per $0 < t, x < \frac{1}{2}$:

$$|\log(x+t)| \leq |\log t| \in L^1$$

Per parti si vede che $\int_0^1 |\log t|\, dt = 1 < \infty$.

Le stime precedenti servono per la continuità in $x=0$.

(Per $x \in (0,1]$ è tutto più facile.)

Dunque per convergenza dominata $\forall x_0 \in [0,1]$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \int_0^1 \lim_{x \to x_0} \frac{\log(x+t)}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{\log(x_0+t)}{t+1}\, dt = f(x_0).$$

ii) Formalmente:

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{\log(x+t)}{(t+1)}\, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\log(x+t)}{(t+1)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+x)}\, dt.$$

Se $0 < \delta \leq x \leq 1$ si ha $\frac{1}{(t+1)(t+x)} \leq \frac{1}{(t+1)(t+\delta)} \in L^1(0,1)$.

Quindi si può derivare sotto segno di integrale e

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+x)}\, dt.$$

(iii) Osserviamo che $f'(x) > 0$ ed anche $f' \in C(]0,1])$.
Dunque $x \mapsto f'(x)$ è misurabile.
Per il Teorema di Tonelli:

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+x)}}_{\geq 0} dt \Big) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t+1} \left(\int_0^1 \frac{1}{t+x} dx \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t+1} \Big[\log(t+x) \Big]_{x=0}^{x=1} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\log(t+1) - \log t}{t+1} dt$$

Chiaramente $\frac{\log(t+1)}{t+1} \in L^1(0,1)$ (l'integrale si calcola)

Inoltre

$$\left| -\frac{\log t}{t+1} \right| \underset{t \in [0,1]}{\leq} \frac{1}{2} |\log t| \in L^1(0,1)$$

Questo prova che $\int_0^1 f'(x)\,dx < \infty$. $\square$