Esercizio Sia $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ e definiamo

$f : Q \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Calcolare tutti i $1 \leq p < \infty$ tali che $f \in L^p(Q)$.

Soluzione. f è chiaramente misurabile. Dobbiamo determinare i $p \geq 1$ tali che

$$\int_Q \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dx\, dy < \infty$$

Posso usare il Teorema di Tonelli

$$\int_Q \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy \right) dx$$

dove

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy = \int_0^x \frac{1}{(x-y)^{p/2}}\, dy + \int_x^1 \frac{1}{(y-x)^{p/2}}\, dy$$

$p \neq 2$

$$= \left[\frac{-(x-y)^{-\frac{p}{2}+1}}{-\frac{p}{2}+1} \right]_{y=0}^{y=x} + \left[\frac{(y-x)^{-\frac{p}{2}+1}}{-\frac{p}{2}+1} \right]_{y=x}^{y=1}$$

Quando $p = 2$ le primitive sono logaritmi.

Se $p > 2$ ed anche se $p = 2$ si vede che

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy = \infty \quad \forall x \in [0,1].$$

Quindo $1 \leq p < 2$ si trova

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy = \frac{x^{1-p/2}}{1-p/2} + \frac{(1-x)^{1-p/2}}{1-p/2}$$

e dunque

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy \overset{\text{simmetria}}{=} 2 \int_0^1 \frac{x^{1-p/2}}{1-p/2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{(1-p/2)(2-p/2)} \cdot \left[x^{2-p/2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{(1-p/2)(2-p/2)}$$

Conclusione:

$$\|f\|_p = \left(\frac{2}{(1-p/2)(2-p/2)} \right)^{1/p} .$$

Esercizio Per ogni $A \subset [0,1]$ si definiscano

$$\mu(A) = \sqrt{\mathcal{L}^1(A)} \qquad e \qquad \nu(A) = \sqrt{\operatorname{diam} A}$$
$$= \sup\{\sqrt{|x-y|} \ : \ x,y \in A\}.$$

1) Stabilire se μ e ν sono misure esterne su $[0,1]$

2) Stabilire se μ e ν sono misure Boreliane su $[0,1]$.

Soluzione. 1) Se $A = \{x,y\}$ con $x,y \in [0,1]$ e $x \neq y$ allora

$$\nu(A) = \sqrt{|x-y|} \neq 0$$
$$\nu(\{x\}) = 0 \quad e \quad \nu(\{y\}) = 0$$

Dunque

$$0 \neq \nu(A) = \nu(\{x\} \cup \{y\}) > \nu(\{x\}) + \nu(\{y\}) = 0$$

Dunque ν non è subadditiva e pertanto non è una misura esterna.

Affermo che μ è una misura esterna. Infatti:

(1) $\mu(\emptyset) = \sqrt{\mathcal{L}^1(\emptyset)} = \sqrt{0} = 0$

(2) Provo che $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

con $A_n \subset [0,1]$.

Considero la funzione $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$.

Chiaramente

$$\sqrt{t+s} = \varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s) = \sqrt{t} + \sqrt{s}$$

(Elevare al quadrato).

Quindi per induzione si trova

$$\varphi(t_1 + \dots + t_n) \le \varphi(t_1) + \dots + \varphi(t_n)$$

e passando al limite (φ è continua):

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n).$$

Di conseguenza

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sqrt{\mathcal{L}^1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_n)} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mathcal{L}^1(A_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2) ν non può essere una misura (Boreliana) per quanto visto al punto 1).

Proviamo che μ NON è una misura Boreliana.

Gli insiemi $[0,1]$, $[0,1/2]$ e $(1/2, 1]$ sono Boreliani e $[0,1] = [0,1/2] \cup (1/2,1]$ disgiunta.

Inoltre

$$\mu([0,1]) = 1, \quad \mu([0,1/2]) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \mu\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

e dunque

$$\mu([0,1]) = 1 < \sqrt{2} = \mu([0,1/2]) + \mu((1/2,1]).$$