Analisi Reale

Scritto del 15 Giugno 2015

Esercizio 1 (10 punti) Su $\mathbb{R}$ fissiamo la misura di Lebesgue.

i) Trovare, se possibile, una successione di numeri reali $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^k \chi_{[0,1]}(x)$ converga a zero in $L^1(\mathbb{R})$ ma non in $L^2(\mathbb{R})$.

ii) Trovare, se possibile, una successione reale $c_k > 0$ tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^{-1-1/k} \chi_{[1,\infty[}(x)$ converga a zero in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$.

iii) Trovare, se possibile, una successione di funzioni $f_k \in L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ che tenda a zero in $L^2([0,1])$ ma non in $L^1([0,1])$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Supponendo $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ provare che $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dedurne che $\varphi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$, per qualche costante $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Provare che se φ è misurabile allora φ è ancora della forma $\varphi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$.

iii) (Facoltativo) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Provare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Sugg.: i) $(\varphi(x+h) - \varphi(x))/h = ((\varphi(h) - \varphi(0))/h)\varphi(x)$. ii) Regolarizzazione.

Esercizio 3 (10 punti) Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$.

i) Provare che la formula

$$\varphi(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y} d\mu(y), \quad x \in [0,1],$$

definisce una funzione $\varphi \in C^1(]0,1]; \mathbb{R})$.

ii) Supponiamo che esista $\alpha > 0$ tale che $\mu([0,x]) \leq x^\alpha$ per ogni $x \in [0,1]$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che φ sia assolutamente continua su $[0,1]$.

---

3 ore a disposizione