Analisi Reale

Scritto del 15 Settembre 2015

Esercizio 1 (10 punti) Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che per ogni $x > 0$ si abbia

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

Quali valori di $\alpha > 0$ assicurano che la serie di funzioni

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{kf(x+k)}{\log^2 k}, \quad 0 < x < 1,$$

converge in $L^1(0,1)$?

Esercizio 2 (10 punti) Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ tale che per ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, dove $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, si abbia $\mu([\alpha, \beta]) \leq (\beta - \alpha)^2$. Provare che μ è la misura nulla.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $f \in L^\infty([0,1])$ una funzione positiva su $[0,1]$. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \log \Big(\int_{[0,1]} \sinh(pf(x))dx \Big).$$

---

3 ore a disposizione