Analisi Reale

Anno Accademico 2014-2015

Roberto Monti

Versione del 13 Ottobre 2014

Contents

CHAPTER 1

Introduzione alla teoria della misura

1. Misure esterne e misure su σ-algebre. Criterio di Carathéodory

In questa sezione introduciamo le definizioni di misura esterna, di σ-algebra, e di misura su una σ-algebra. Per Criterio di Carathéodory, a partire da una misura esterna si può produrre una σ-algebra, detta "degli insiemi misurabili". La misura esterna ristretta a tale σ-algebra è una misura.

Nel seguito X è un insieme e $\mathscr{P}(X)$ è l'insieme delle parti di X.

DEFINIZIONE 1.1 (Misura esterna). Una funzione $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ è una *misura esterna* se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;
ii) se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$ (proprietà di *monotonia*);
iii) per ogni successione di insiemi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X vale la *subadditività numerabile*

SuN (1.1)
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Una σ-algebra è una famiglia di insiemi chiusa per complemento, intersezioni ed unioni numerabili. Più precisamente:

DEFINIZIONE 1.2 (σ–algebra). Un insieme $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ è una σ–algebra dell'insieme X se:

i) $\emptyset, X \in \mathscr{A}$;
ii) se $A \in \mathscr{A}$ allora $A' = X \setminus A \in \mathscr{A}$;
iii) se $A_k \in \mathscr{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

OSSERVAZIONE 1.3. Chiaramente, se $A_k \in \mathscr{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora si ha $A_k' \in \mathscr{A}$ e quindi dalla iii) segue che

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big)' = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k' \in \mathscr{A}.$$

Di conseguenza, dalla ii) si deduce che $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Analogamente, se $A, B \in \mathscr{A}$ allora $A \setminus B = A \cap B' \in \mathscr{A}$.

DEFINIZIONE 1.4 (Misura e spazio di misura). Sia $\mathscr{A}$ una σ–algebra su un insieme X. Una funzione $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ è una misura (positiva) se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;
ii) se $A_k \in \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$, è una successione di insiemi mutualmente disgiunti, allora vale l'*additività numerabile*

AdN (1.2)
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

La terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ si dice allora *spazio di misura.*

Esempio 1.5 (Misura di Dirac). Sia X un insieme e fissiamo un punto $x_0 \in X$. La funzione $\delta : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A, \\ 0 & \text{se } x_0 \in X \setminus A, \end{cases}$$

è una misura sulla σ-algebra $\mathscr{P}(X)$, detta delta di Dirac concentrata in x_0.

Esempio 1.6 (Counting measure). Sia X un insieme e definiamo la funzione χ : $\mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\chi(A) = \begin{cases} \mathrm{Card}(A) = \#A & \text{se } \mathrm{Card}(A) < \infty, \\ \infty & \text{se la cardinalità di } A \text{ non è finita.} \end{cases}$$

La funzione χ è una misura su X detta *counting measure.*

Torniamo alle misure esterne, e definiamo la nozione di insieme misurabile.

Definizione 1.7 (Insieme misurabile). Sia X un insieme e sia μ una misura esterna su X. Un insieme $A \subset X$ si dice μ*−misurabile* se per ogni $E \subset X$ vale la *proprietà di spezzamento*

IM (1.3)
$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A').$$

Indicheremo con $\mathscr{M}(X, \mu)$ o più semplicemente con $\mathscr{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili di X rispetto alla misura esterna μ.

Osservazione 1.8. La disuguaglianza $\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A')$ è sempre verifica, per la subadditività della misura esterna.

La costruzione di Carathèodory ci assicura che $\mathscr{M}$ è una σ-algebra su X.

Teorema 1.9 (Criterio di Carathéodory). *Sia μ una misura esterna su un insieme X. La famiglia $\mathscr{M}$ degli insiemi μ–misurabili è una σ–algebra ed inoltre la restrizione $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ è una misura. Inoltre, questa misura è completa nel senso che $\mu(A) = 0$ implica $A \in \mathscr{M}$.*

Dim. È immediato vedere che $\emptyset \in \mathscr{M}$. Inoltre, dalla simmetria della definizione di insieme misurabile segue che $A \in \mathscr{M}$ se e solo se $A' \in \mathscr{M}$.

Proviamo che se $A_k \in \mathscr{M}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora si ha anche

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{M}.$$

Per induzione, usando la definizione (1.3) di insieme misurabile si trova, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E\cap A_1) + \mu(E \cap A_1')\\ &= \mu(E\cap A_1) + \mu(E\cap A_1'\cap A_2) + \mu(E\cap A_1'\cap A_2')\\ &= \mu(E\cap A_1) + \mu(E\cap A_1'\cap A_2) + \mu(E\cap A_1'\cap A_2'\cap A_3)\\ &\quad\ + \mu(E\cap A_1'\cap A_2'\cap A_3')\\ &= \dots\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mu\Big(E\cap\Big(A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\Big)'\Big).\end{aligned}$$

Dalla proprietà di monotonia della misura esterna segue che

$$\mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)'\Big) \le \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\Big)'\Big),$$

e quindi per ogni $k\in\mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$\mu(E) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu\Big(E\cap\Big(A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)'\Big).$$

Passando al limite per $k\to\infty$ e poi usando la subadditività numerabile della misura esterna si ottiene:

$$\begin{aligned}\mu(E) &\ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(E\cap\Big(A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)'\Big)\\ &\ge \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)'\Big)\\ &\ge \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)\Big) + \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)'\Big) \ge \mu(E).\end{aligned}$$

Null'ultima disuguaglianza abbiamo usato di nuovo la subadditività della misura esterna. Si conclude che le disuguaglianze precedenti sono tutte uguaglianze, e quindi

$$\mu(E) = \mu(E\cap A) + \mu(E\cap A'),$$

per ogni E, ovvero $A\in\mathscr{M}$. Abbiamo in effetti trovato l'identità più ricca di informazioni:

ricca (1.4) $$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(E\cap\Big(A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)'\Big).$$

Mostriamo che μ è $\sigma-$additiva su $\mathscr{M}$. Sia $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ con unione disgiunta, e nell'uguaglianza (1.4) scegliamo $E=A$. Usando il fatto che $\mu(\emptyset)=0$ si ottiene

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

Rimane da verificare che μ è completa. Se $\mu(A) = 0$, allora dalla subadditività e dalla monotonia della misura esterna si trova

$$\mu(E) \le \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A') \le \mu(A) + \mu(E) = \mu(E),$$

e dunque si hanno uguaglianze e pertanto $A \in \mathscr{M}$. Questo termina la dimostrazione del teorema.

□

2. Misura di Lebesgue e misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$

2.1. Misura di Lebesgue. Introduciamo la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, e la σ-algebra degli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili in $\mathbb{R}^n$.

Un pluri–intervallo (o plurirettangolo) $I \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme del tipo

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n], \quad \text{con } a_i < b_i \text{ per } i = 1, \ldots, n.$$

La misura di un pluri–intervallo I è definita in modo naturale

$$\operatorname{mis}(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Un *ricoprimento Lebesguiano* di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è una successione di pluri–intervalli $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k.$$

Definiamo la *misura esterna di Lebesgue* $\mathscr{L}^n : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ponendo per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathscr{L}^n(A) = \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mis}(I_k) : (I_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ricoprimento Lebesguiano di } A \Big\}.$$

Verifichiamo che la funzione di insiemi $\mathscr{L}^n : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ è una misura esterna. Certamente $\mathscr{L}^n(\emptyset) = 0$ e $\mathscr{L}^n(A) \le \mathscr{L}^n(B)$ se $A \subset B$, dal momento che tutti i ricoprimenti Lebesguiani di B sono anche ricoprimenti di A.

Proviamo la subadditività numerabile (1.1). Sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi di $\mathbb{R}^n$. Se il membro di destra in (1.1) non è finito, ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k) = \infty,$$

allora non c'è nulla da provare. Possiamo allora supporre che la serie converga e quindi $\mathscr{L}^n(A_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I_i^k : i \in \mathbb{N}\}$ di A_k tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mis}(I_i^k) \le \mathscr{L}^n(A_k) + \varepsilon/2^k.$$

La famiglia di pluri-intervalli $\{I_i^k : i, k \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento Lebesguiano di $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, e dunque

$$\mathscr{L}^n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mis}(I_i^k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathscr{L}^n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k).$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene la tesi.

Per il Criterio di Carathéodory, gli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili formano una σ-algebra $\mathscr{M}$ su cui $\mathscr{L}^n$ è una misura completa: la *misura di Lebesgue*. Un insieme $A \in \mathscr{M}$ si dice *Lebesgue misurabile*.

2.2. Misure di Hausdorff. Sia $n \geq 1$ un intero e sia $s \geq 0$ un parametro dimensionale reale. Definiamo la costante

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)},$$

dove

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} x^{s-1}\, dx, \quad s > 0,$$

è la funzione Γ di Eulero. Il significato di questa costante è che per $s = k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\omega_k = \mathscr{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : |x| < 1\}),$$

la misura di Lebesgue della palla unitaria k-dimensionale. Ricordiamo che il diametro di un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è per definizione

$$\mathrm{diam}(E) = \sup_{x,y\in E} |x-y|.$$

Per ogni $\delta > 0$, definiamo la "premisura" di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, la funzione $\mathscr{H}^s_\delta : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, ponendo per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\omega_s \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s : E_k \subset \mathbb{R}^n,\ \mathrm{diam}(E_k) \leq \delta,\ A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big\}.$$

Definiamo quindi la misura di Hausdorff s-dimensionale $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, ponendo

$$\mathscr{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathscr{H}^s_\delta(A).$$

La funzione $\mathscr{H}^s$ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. La dimostrazine di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per la misura di Lebesgue e viene omessa. Per ogni $s \geq 0$, gli insiemi $\mathscr{H}^s$-misurabili formano una σ-algebra su cui $\mathscr{H}^s$ è una misura, la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

3. Teoremi di continuità per successioni monotone di insiemi misurabili

Una successione di sottoinsiemi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di X si dice monotona crescente se $A_k \subset A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si dice monotona decrescente se $A_{k+1} \subset A_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 3.1. *Sia μ una misura esterna sull'insieme X e sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi μ-misurabili di X. Allora:*

(i) *Se la successione è crescente si ha* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big)$.

(ii) *Se la successione è decrescente e $\mu(A_1) < \infty$ si ha* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcap_{k=1}^\infty A_k\Big)$.

DIM. (i) Usiamo la proprietà di additività numerabile della misura per gli insiemi misurabili:

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big)\\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu\Big(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big)\\ &= \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).\end{aligned}$$

Abbimo usato il fatto che la successione è crescente per dire che $\bigcup_{k=1}^m A_k = A_m$.

(ii) Consideriamo la successione $B_k = A_1 \setminus A_k$, $k \in \mathbb{N}$, che è crescente, e dunque

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \setminus A_k\Big) = \mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Siccome $\mu(A_1) < \infty$ si ha $\mu(A_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi l'identità

$$\mu(A_1) = \mu((A_1 \setminus A_k) \cup A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) + \mu(A_k)$$

implica che $\mu(A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A_k)$ e la tesi (ii) segue per differenza di misure. $\square$