Analisi Reale

Anno Accademico 2014-2015

Roberto Monti

Versione del 19 Novembre 2014

Contents

CHAPTER 1

Introduzione alla teoria della misura

1. Misure esterne e misure su σ-algebre. Criterio di Carathéodory

In questa sezione introduciamo le definizioni di misura esterna, di σ-algebra, e di misura su una σ-algebra. Per Criterio di Carathéodory, a partire da una misura esterna si può produrre una σ-algebra, detta "degli insiemi misurabili". La misura esterna ristretta a tale σ-algebra è una misura.

Nel seguito X è un insieme e $\mathscr{P}(X)$ è l'insieme delle parti di X.

Definizione 1.1 (Misura esterna). Una funzione $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ è una *misura esterna* se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;
ii) se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$ (proprietà di *monotonia*);
iii) per ogni successione di insiemi $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X vale la *subadditività numerabile*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.1}$$

Una σ-algebra è una famiglia di insiemi chiusa per complemento, intersezioni ed unioni numerabili. Più precisamente:

Definizione 1.2 (σ–algebra). Un insieme $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ è una σ–algebra dell'insieme X se:

i) $\emptyset, X \in \mathscr{A}$;
ii) se $A \in \mathscr{A}$ allora $A' = X \setminus A \in \mathscr{A}$;
iii) se $A_k \in \mathscr{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Osservazione 1.3. Chiaramente, se $A_k \in \mathscr{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora si ha $A_k' \in \mathscr{A}$ e quindi dalla iii) segue che

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big)' = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k' \in \mathscr{A}.$$

Di conseguenza, dalla ii) si deduce che $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Analogamente, se $A, B \in \mathscr{A}$ allora $A \setminus B = A \cap B' \in \mathscr{A}$.

Definizione 1.4 (Misura e spazio di misura). Sia $\mathscr{A}$ una σ–algebra su un insieme X. Una funzione $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ è una misura (positiva) se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;
ii) se $A_k \in \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$, è una successione di insiemi mutualmente disgiunti, allora vale l'*additività numerabile*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.2}$$

La terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ si dice allora *spazio di misura*.

ESEMPIO 1.5 (Misura di Dirac). Sia X un insieme e fissiamo un punto $x_0 \in X$. La funzione $\delta : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A, \\ 0 & \text{se } x_0 \in X \setminus A, \end{cases}$$

è una misura sulla σ-algebra $\mathscr{P}(X)$, detta delta di Dirac concentrata in x_0.

ESEMPIO 1.6 (Counting measure). Sia X un insieme e definiamo la funzione $\chi : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\chi(A) = \begin{cases} \#A = \mathrm{Card}(A) & \text{se } \mathrm{Card}(A) < \infty, \\ \infty & \text{se la cardinalità di } A \text{ non è finita.} \end{cases}$$

La funzione χ è una misura su X detta *counting measure*.

Torniamo alle misure esterne, e definiamo la nozione di insieme misurabile.

DEFINIZIONE 1.7 (Insieme misurabile). Sia X un insieme e sia μ una misura esterna su X. Un insieme $A \subset X$ si dice μ*−misurabile* se per ogni $E \subset X$ vale la *proprietà di spezzamento*

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A'). \tag{1.3}$$

Indicheremo con $\mathscr{M}(X, \mu)$ o più semplicemente con $\mathscr{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili di X rispetto alla misura esterna μ.

OSSERVAZIONE 1.8. La disuguaglianza $\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A')$ è sempre verifica, per la subadditività della misura esterna.

La costruzione di Carathèodory ci assicura che $\mathscr{M}$ è una σ-algebra su X.

TEOREMA 1.9 (Criterio di Carathéodory). *Sia μ una misura esterna su un insieme X. La famiglia $\mathscr{M}$ degli insiemi μ−misurabili è una σ−algebra ed inoltre la restrizione $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ è una misura. Inoltre, questa misura è completa nel senso che $\mu(A) = 0$ implica $A \in \mathscr{M}$.*

DIM. È immediato vedere che $\emptyset \in \mathscr{M}$. Inoltre, dalla simmetria della definizione di insieme misurabile segue che $A \in \mathscr{M}$ se e solo se $A' \in \mathscr{M}$.

Proviamo che se $A_k \in \mathscr{M}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora si ha anche

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{M}.$$

Per induzione, usando la definizione (1.3) di insieme misurabile si trova, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1') \\ &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2') \\ &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2' \cap A_3) \\ &\qquad + \mu(E \cap A_1' \cap A_2' \cap A_3') \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big)'\Big).\end{aligned}$$

Dalla proprietà di monotonia della misura esterna segue che

$$\mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \le \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big)'\Big),$$

e quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$\mu(E) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big).$$

Passando al limite per $k \to \infty$ e poi usando la subadditività numerabile della misura esterna si ottiene:

$$\begin{aligned}\mu(E) &\ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \\ &\ge \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \\ &\ge \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \ge \mu(E).\end{aligned}$$

Null'ultima disuguaglianza abbiamo usato di nuovo la subadditività della misura esterna. Si conclude che le disuguaglianze precedenti sono tutte uguaglianze, e quindi

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A'),$$

per ogni E, ovvero $A \in \mathscr{M}$. Abbiamo in effetti trovato l'identità più ricca di informazioni:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big). \tag{1.4}$$

Mostriamo che μ è $\sigma-$additiva su $\mathscr{M}$. Sia $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con unione disgiunta, e nell'uguaglianza (1.4) scegliamo $E = A$. Usando il fatto che $\mu(\emptyset) = 0$ si ottiene

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Rimane da verificare che μ è completa. Se $\mu(A) = 0$, allora dalla subadditività e dalla monotonia della misura esterna si trova

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A') \leq \mu(A) + \mu(E) = \mu(E),$$

e dunque si hanno uguaglianze e pertanto $A \in \mathscr{M}$. Questo termina la dimostrazione del teorema.

□

2. Misura di Lebesgue e misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$

2.1. Misura di Lebesgue. Introduciamo la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, e la σ-algebra degli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili in $\mathbb{R}^n$.

Un plurintervallo $I \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme del tipo

$$I = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n), \quad \text{con } a_i < b_i \text{ per } i = 1, \ldots, n.$$

La misura di un plurntervallo I è definita in modo naturale

$$\text{mis}(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Un *ricoprimento Lebesguiano* di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è una successione di plurintervalli $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k.$$

Definiamo la *misura esterna di Lebesgue* $\mathscr{L}^n : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ponendo per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathscr{L}^n(A) = \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{mis}(I_k) : (I_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ricoprimento Lebesguiano di } A \Big\}.$$

Verifichiamo che la funzione di insiemi $\mathscr{L}^n : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ è una misura esterna. Certamente $\mathscr{L}^n(\emptyset) = 0$ e $\mathscr{L}^n(A) \leq \mathscr{L}^n(B)$ se $A \subset B$, dal momento che tutti i ricoprimenti Lebesguiani di B sono anche ricoprimenti di A.

Proviamo la subadditività numerabile (1.1). Sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi di $\mathbb{R}^n$. Se il membro di destra in (1.1) non è finito, ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k) = \infty,$$

allora non c'è nulla da provare. Possiamo allora supporre che la serie converga e quindi $\mathscr{L}^n(A_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I_i^k : i \in \mathbb{N}\}$ di A_k tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{mis}(I_i^k) \leq \mathscr{L}^n(A_k) + \varepsilon/2^k.$$

La famiglia di plurintervalli $\{I_i^k : i, k \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento Lebesguiano di $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, e dunque

$$\mathscr{L}^n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{mis}(I_i^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathscr{L}^n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k).$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene la tesi.

Per il Criterio di Carathéodory, gli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili formano una σ-algebra $\mathscr{M}$ su cui $\mathscr{L}^n$ è una misura completa: la *misura di Lebesgue*. Un insieme $A \in \mathscr{M}$ si dice *Lebesgue misurabile*.

2.2. Misure di Hausdorff. Sia $n \geq 1$ un intero e sia $s \geq 0$ un parametro dimensionale reale. Definiamo la costante

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)},$$

dove

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s-1}\, dx, \quad s > 0,$$

è la funzione Γ di Eulero. Il significato di questa costante è che per $s = k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\omega_k = \mathscr{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : |x| < 1\}),$$

la misura di Lebesgue della palla unitaria k-dimensionale. Ricordiamo che il diametro di un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è per definizione

$$\operatorname{diam}(E) = \sup_{x,y \in E} |x-y|.$$

Per ogni $\delta > 0$, definiamo la "premisura" di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, la funzione $\mathscr{H}^s_\delta : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, ponendo per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\omega_s \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\frac{\operatorname{diam}(E_k)}{2}\Big)^s : E_k \subset \mathbb{R}^n,\ \operatorname{diam}(E_k) \leq \delta,\ A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big\}.$$

Definiamo quindi la misura di Hausdorff s-dimensionale $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, ponendo

$$\mathscr{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathscr{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathscr{H}^s_\delta(A).$$

La funzione $\mathscr{H}^s$ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. La dimostrazine di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per la misura di Lebesgue e viene omessa. Per ogni $s \geq 0$, gli insiemi $\mathscr{H}^s$-misurabili formano una σ-algebra su cui $\mathscr{H}^s$ è una misura, la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

3. Teoremi di continuità per successioni monotone di insiemi misurabili

Una successione$(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di X si dice monotona crescente se $A_k \subset A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si dice monotona decrescente se $A_{k+1} \subset A_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 3.1. *Sia μ una misura esterna sull'insieme X e sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi μ-misurabili di X. Allora:*

(i) *Se la successione è crescente si ha* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big)$.

(ii) *Se la successione è decrescente e $\mu(A_1) < \infty$ si ha* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcap_{k=1}^\infty A_k\Big)$.

Dim. (i) Usiamo la proprietà di additività numerabile della misura per gli insiemi misurabili:

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu\Big(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) \\ &= \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).\end{aligned}$$

Abbimo usato il fatto che la successione è crescente per dire che $\bigcup_{k=1}^m A_k = A_m$.

(ii) Consideriamo la successione $B_k = A_1 \setminus A_k$, $k \in \mathbb{N}$, che è crescente, e dunque

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \setminus A_k\Big) = \mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Siccome $\mu(A_1) < \infty$ si ha $\mu(A_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi l'identità

$$\mu(A_1) = \mu((A_1 \setminus A_k) \cup A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) + \mu(A_k)$$

implica che $\mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$ e la tesi (ii) segue. □

CHAPTER 2

Teoria dell'integrale

1. Funzioni misurabili

In tutta questa sezione X è un insieme e μ è una misura esterna su X. Diremo misurabili gli insiemi di X che sono μ-misurabili.

DEFINIZIONE 1.2 (Funzioni misurabili). Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *misurabile* se per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ l'antimmagine $f^{-1}(A) \subset X$ è un insieme misurabile di X.

OSSERVAZIONE 1.3. Una funzione $f : X \to [-\infty, \infty]$ si dirà misurabile se gli insiemi $f^{-1}(\{-\infty\})$ ed $f^{-1}(\{\infty\})$ sono misurabili ed è verificata la condizione della definizione precedente.

PROPOSIZIONE 1.4. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni.*

1) *$f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.*
2) *$f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.*
3) *$f^{-1}(]\alpha, \infty[)$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.*
4) *$f^{-1}([\alpha, \infty[)$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.*
5) *$f^{-1}(]\alpha, \beta[)$ è misurabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
6) *$f^{-1}(A)$ è misurabile per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$.*

DIM. La prova è elementare e viene omessa. La dimostrazione che 1) implica 2) è la seguente:

$$f^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \{x \in X : f(x) \le \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{ x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k} \Big\},$$

e l'insieme a destra è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili. □

PROPOSIZIONE 1.5. *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni misurabili. Allora anche le funzioni $f + g$, fg, f/g con $g \neq 0$ su X, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e $|f|$ sono misurabili.*

DIM. Proviamo che la somma $f + g$ è misurabile. Infatti, dato $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) + g(x) < \alpha\}$ coincide con l'insieme

$$\big\{ x \in X : \text{esistono } s, t \in \mathbb{Q} \text{ tali che } f(x) < s,\ g(x) < t \text{ e } s + t < \alpha \ \big\}$$

ovvero si ha

$$(f + g)^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \bigcup_{\substack{s,t \in \mathbb{Q} \\ s+t<\alpha}} f^{-1}(]-\infty, s[) \cap g^{-1}(]-\infty, t[),$$

e l'insieme a destra è misurabile in quanto unione numerabile di misurabili.

Poi osserviamo che, dato $\alpha \geq 0$, si ha $\{f^2 > \alpha\} = \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\}$ e quindi f^2 è misurabile. Dunque, anche il prodotto di funzioni $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ è misurabile. Lasciamo al lettore il compito di verificare la misurabilità di $1/g$.

Le funzioni $f^+ = f\chi_{\{f\geq 0\}}$ ed $f^- = -f\chi_{\{f\leq 0\}}$ sono misurabili in quanto prodotto di funzioni misurabili. Quindi è misurabile anche la funzione $|f| = f^+ + f^-$.

□

Nella dimostrazione precedente abbiamo usato la notazione $\chi_A = 1_A$ per la funzione caratteristica di un insieme.

Definizione 1.6. La funzione caratteristica di un insieme $A \subset X$ è la funzione $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

La funzione χ_A è misurabile se e solo se A è misurabile.

Proposizione 1.7. *Siano $f_k : X \to [-\infty, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili. Allora anche le funzioni*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \liminf_{k\to\infty} f_k, \quad \limsup_{k\to\infty} f_k$$

sono misurabili. In particolare, il limite puntuale di funzioni misurabili, se esiste, è una funzione misurabile.

Dim. Proviamo che la funzione $g = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ è misurabile. Infatti, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) < \alpha\}$$

e quindi $g^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ è un insieme misurabile.

In modo analogo, detta $h = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{x \in X : h(x) > \alpha\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) > \alpha\}$$

e quindi $h^{-1}(]\alpha, \infty[) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}(]\alpha, \infty[)$ è un insieme misurabile.

Infine, anche le funzioni

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} f(x), \qquad \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} f(x)$$

sono misurabili. □

Ora proviamo che le funzioni misurabili non negative si possono approssimare con funzioni di struttura speciale.

Teorema 1.8. *Sia $f : X \to [0, \infty]$ una funzione misurabile non negativa. Esiste una successione di insiemi misurabili $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tali che*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x), \quad \textit{per ogni } x \in X.$$

Inoltre, se f è limitata esiste una scelta di insiemi tale che la serie converge uniformemente.

DIM. Definiamo l'insieme $A_1 = \{x \in X : f(x) \geq 1\}$, che è misurabile. Poi definiamo l'insieme $A_2 = \{x \in X : f(x) - \chi_{A_1}(x) \geq \frac{1}{2}\}$, che è misurabile. Osserviamo che

$$f(x) \geq \chi_{A_1}(x) \qquad \text{e di più} \qquad f(x) \geq \chi_{A_1}(x) + \frac{1}{2}\chi_{A_2}(x)$$

per ogni $x \in X$.

Per induzione, per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo definire l'insieme misurabile

$$A_k = \Big\{x \in X : f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x) \geq \frac{1}{k}\Big\}.$$

Sempre per induzione, si prova che per ogni $x \in X$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x),$$

e dunque per $k \to \infty$ si ottiene

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x), \tag{1.5}$$

per ogni $x \in X$.

Proviamo che in (1.5) vale l'uguaglianza. Infatti, se $f(x) = \infty$ allora $x \in A_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Se, invece, $0 \leq f(x) < \infty$ allora $x \notin A_k$ per infiniti k (altrimenti la serie diverge), e dunque, dalla definizione di A_k segue che

$$f(x) < \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x),$$

per infiniti k e passando al limite per $k \to \infty$ si ottiene la tesi.

Ora supponiamo che risulti $f(x) \leq M < \infty$ per ogni $x \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, siano $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{1}{k_1} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_{j=k_1}^{k_2} \frac{1}{j} > M.$$

Dalla disuguaglianza

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) \leq f(x) \leq M,$$

segue che per ogni $x \in X$ esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ con $k_1 \leq \bar{k} \leq k_2$ tale che $x \notin A_{\bar{k}}$, ovvero

$$f(x) - \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x) < \frac{1}{\bar{k}} \leq \frac{1}{k_1} < \varepsilon.$$

Per la monotonia puntuale delle somme troncate, la disuguaglianza

$$f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}(x) < \varepsilon,$$

vale allora per tutti i $k \geq k_2$. Il numero k_2 è stato scelto indipendentemente da x. Questo prova la convergenza uniforme.

$\square$

2. Convergenza quasi ovunque. Teorema di Egorov

Sia μ una misura esterna su un insieme X. Diciamo che una successione di funzioni $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, converge quasi ovunque (q.o.) ad una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ se esiste un insieme $N \subset X$ di misura nulla, $\mu(N) = 0$, tale che per ogni $x \in X \setminus N$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Il Teorema di Egorov mostra che la convergenza quasi ovunque di funzioni misurabili implica la convergenza uniforme su un insieme di misura grande.

Teorema 2.9 (Egorov). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $\mu(X) < \infty$, e siano $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili tali che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in X$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dim. A meno di togliere da X un insieme di misura nulla, non è restrittivo supporre che $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, per ogni $x \in X$. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ definiamo gli insiemi

$$S_{n,k} = \bigcap_{j\geq n} \Big\{ x \in X : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \Big\}.$$

Ogni insieme $S_{n,k}$ è misurabile, si ha la monotonia $S_{n,k} \subset S_{n+1,k}$, e inoltre $\bigcup_{n=1}^\infty S_{n,k} = X$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti, fissato $x \in X$, in virtù della convergenza puntuale esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ per ogni $j \geq n$, ovvero $x \in S_{n,k}$.

Per la continuità della misura per successioni monotone, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S_{n,k}) = \mu(X),$$

ed essendo la misura μ finita, si deduce che per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato

$$\lim_{n\to\infty} \mu(X \setminus S_{n,k}) = 0.$$

Pertanto, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(X \setminus S_{n_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

dove $\varepsilon > 0$. Definiamo l'insieme $X_\varepsilon = \displaystyle\bigcap_{k=1}^\infty S_{n_k,k}$. La misura del complementare si stima nel seguente modo:

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty X \setminus S_{n_k,k} \Big) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(X \setminus S_{n_k,k}) \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Chiaramente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $X_\varepsilon \subset S_{n_k,k}$ e dunque per ogni $n \geq n_k$ si ha

$$\sup_{x\in X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

Questa è la convergenza uniforme su X_ε. □

3. Integrale di Lebesgue

Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. In questa sezione definiamo l'integrale di Lebesgue di funzioni misurabili. Partiamo dalle funzioni semplici, poi definiamo l'integrale di funzioni non negative e solo alla fine definiamo l'integrale di funzioni con segno.

Definizione 3.10 (Funzione semplice). Una funzione misurabile $\varphi : X \to \mathbb{R}$ si dice *funzione semplice* se l'insieme $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ ha cardinalità finita.

Data una funzione semplice φ, esistono un numero finito di insiemi misurabili $A_1, \ldots, A_n \subset X$ e delle costanti $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{con unione disgiunta,}$$

ed inoltre

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in X. \tag{3.6}$$

Se richiediamo che i valori $c_1, \ldots, c_n$ siano distinti (e che gli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ siano disgiunti), allora la rappresentazione è unica.

Definizione 3.11 (Integrale di una funzione semplice). L'integrale di una funzione semplice non negativa $\varphi : X \to [0, \infty)$ è per definizione

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) \in [0, \infty].$$

Convenzione. In questa definizione, conveniamo che $c_i\mu(A_i) = 0$ quando $c_i = 0$ e $\mu(A_i) = \infty$.

Sappiamo che una funzione misurabile $f : X \to [0, \infty]$ ha la rappresentazione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x), \quad x \in X.$$

Qui, gli insiemi A_k sono misurabili ma non disgiunti. Tuttavia, le troncate della serie, ovvero le funzioni

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

assumono un numero finito di valori e dunque sono funzioni semplici. Dal Teorema 1.8 deduciamo il seguente fatto:

Corollario 3.12. *Data una funzione misurabile $f : X \to [0, \infty]$ esiste una successione crescente di funzioni semplici $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x), \quad x \in X.$$

Inoltre, la convergenza si può assumere uniforme se f è limitata.

Definizione 3.13 (Integrale di una funzione misurabile non negativa). Definiamo l'integrale di una funzione misurabile non negativa $f : X \to [0, \infty]$ come

$$\int_X f(x)d\mu = \sup \Big\{ \int_X \varphi(x)d\mu \,:\, \varphi \text{ f.s. tale che } 0 \le \varphi \le f \text{ su } X \Big\} \in [0, \infty].$$

Se l'integrale è finito diremo che la funzione f è *integrabile* su X.

Definiamo ora l'integrale per le funzioni con segno. Data una funzione $f : X \to [-\infty, \infty]$, definiamo la sua parte positiva e la sua parte negativa

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\},$$

di modo che $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ ed $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Definizione 3.14. Diciamo che una funzione misurabile $f : X \to [-\infty, \infty]$ è *sommabile* se la funzione $|f|$ è integrabile. In questo case scriviamo $f \in L^1(X) = L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ e definiamo l'integrale di f su X in $d\mu$

$$\int_X f(x)d\mu = \int_X f^+(x)d\mu - \int_X f^-(x)d\mu.$$

Non c'è una convenzione universale sul significato dei termini "integrabile" e "sommabile". Noi li useremo come sinonimi. Un limite dell'integrale di Lebesgue è che, nel caso di indeterminazioni $\infty - \infty$, non rileva eventuali cancellazioni fra le "aree positive" e le "aree negative" nel sottografico della funzione integranda f, come invece riesce a fare l'integrale improprio di Riemann.

Nel seguente teorema elenchiamo le proprietà standard dell'integrale di Lebesgue. La dimostrazione è omessa.

Teorema 3.15. *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura.*

i) *Se $f, g \in L^1(X)$ allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha f + \beta g \in L^1(X)$ ed inoltre*

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu = \alpha \int_X f(x)d\mu + \beta \int_X f(x)d\mu.$$

Questa è la proprietà di linearità dell'integrale.

ii) *Se $f, g : X \to [0, \infty]$ sono funzioni misurabili (oppure $f, g \in L^1(X)$) tali che $f(x) \le g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$, allora*

$$\int_X f(x)d\mu \le \int_X g(x)d\mu.$$

Questa è la proprietà di monotonia dell'integrale.

iii) *Per ogni $f \in L^1(X)$ si ha la proprietà di subadditività*

$$\Big|\int_X f(x)d\mu\Big| \le \int_X |f(x)|d\mu.$$

iv) *Se $A \subset X$ è misurabile ed $f \in L^1(X)$, allora $f \in L^1(A)$ e si ha*

$$\int_A f(x)d\mu = \int_X f(x)\chi_A(x)\, d\mu.$$

Osservazione 3.16. Anticipando il Teorema di Fubini-Tonelli sullo scambio dell'ordine di integrazione, possiamo dare la seguente interpretazione dell'integrale di Lebesgue. Sia $f \in L^1(X)$ una funzione non negativa, allora

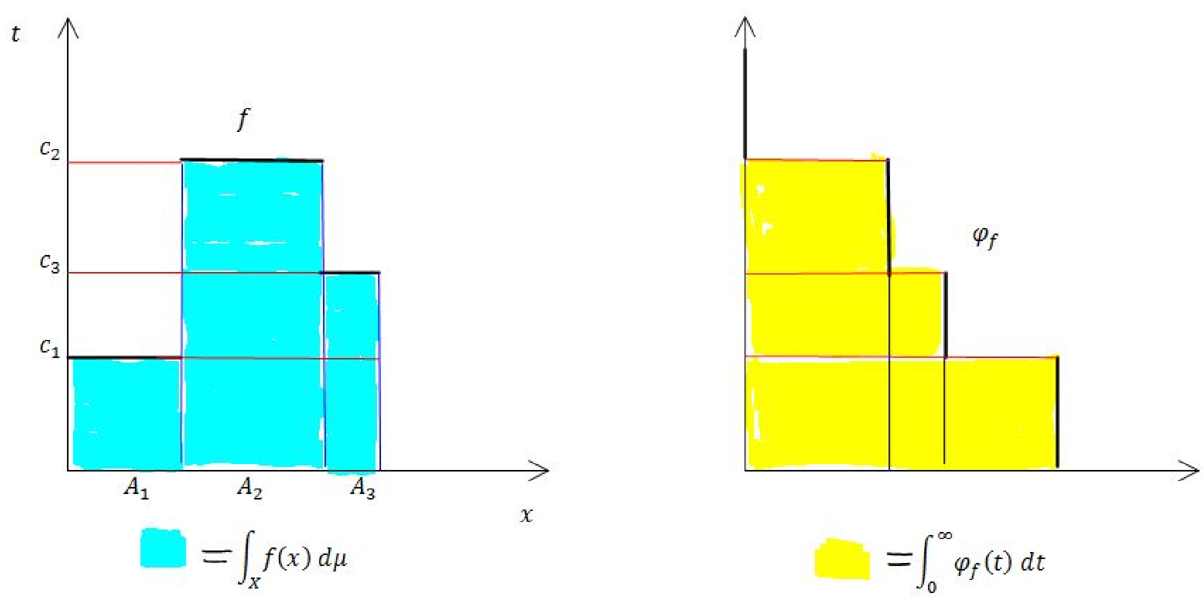
$$\begin{aligned}
\int_X f(x)dx &= \int_X \int_0^{f(x)} dt\, d\mu(x) \\
&= \int_X \int_0^{\infty} \chi_{(0,f(x))}(t)dt\, d\mu(x) \quad \text{[Fubini-Tonelli, ad es. con } \mu(X) < \infty\text{]} \\
&= \int_0^{\infty} \int_X \chi_{(0,f(x))}(t)dt\, d\mu(x) \\
&= \int_0^{\infty} \int_X \chi_{\{f>t\}}(x)d\mu(x)\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt.
\end{aligned}$$

La funzione $\varphi_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$ si dice funzione di ripartizione o funzione di distribuzione di f. Siccome φ_f è monotona decrescente, l'ultimo integrale è definito anche come integrale di Riemann.

Ad esempio per una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ della forma

$$f(x) = c_1\chi_{A_1}(x) + c_2\chi_{A_2}(x) + c_3\chi_{A_3}(x),$$

con la misura di Lebesgue su $[0, 1]$ la situazione è la seguente:



4. Assoluta continuità dell'integrale

Vedremo nel seguito del corso le definizioni di funzione assolutamente continua e di misura assolutamente continua. Qui verifichiamo l'assoluta continuità dell'integrale rispetto alla sua misura di riferimento.

Teorema 4.17 (Assoluta continuità dell'integrale). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f \in L^1(X)$ una funzione sommabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni insieme misurabile $A \subset X$ vale l'implicazione*

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big| \int_A f(x)\, d\mu \Big| \leq \varepsilon.$$

Dim. A meno di sostituire f con $|f|$, non è restrittivo supporre $f \geq 0$. Siccome $f \in L^1(X)$, il suo integrale è finito, e quindi, per la definizione di integrale, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad \int_X f(x) d\mu - \int_X \varphi(x) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

dove $n \geq 1$, $A_i \subset X$ sono insiemi misurabili e $c_i \geq 0$ sono costanti tali che $\mu(A_i) = \infty$ implica $c_i = 0$.

Se f non è identicamente nulla, è possibile supporre che anche φ non sia nulla identicamente (q.o.). L'integrale di φ su un insieme misurabile $A \subset X$ è

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap A_i) \leq \mu(A) \sum_{i=1}^n c_i.$$

Dunque, con la scelta

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i}$$

si ha

$$0 \leq \int_A f(x) d\mu \leq \int_X (f(x) - \varphi(x)) d\mu + \int_A \varphi(x) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

non appena $\mu(A) < \delta$. □

5. Teorema della convergenza monotona e Lemma di Fatou

Il Teorema della convergenza monotona, noto anche come Teorema di Beppo Levi, permette di passare con il limite dentro il segno di integrale quando la successione di funzioni integrate è puntualmente crescente. La dimostrazione si basa sulla continuità della misura per successioni crescenti di insiemi.

Teorema 5.18 (Beppo Levi). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni misurabili positive, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per q.o. $x \in X$. Detta $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ la funzione limite, si ha*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

Dim. La funzione limite f è misurabile in quanto limite q.o. di funzioni misurabili. Siccome $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, per la monotonia dell'integrale si ha

$$0 \leq \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f_{n+1}(x) d\mu \leq \int_X f(x)\, d\mu.$$

Dunque, il seguente limite esiste e si ha

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu \le \int_X f(x) d\mu.$$

Verifichiamo la disuguaglianza opposta. Se mostriamo che ogni funzione semplice $0 \le \varphi \le f$ verifica

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu \le L,$$

allora la tesi segue. La funzione semplice φ è della forma $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}(x)$ dove $c_i \ge 0$ e $A_i \subset X$ sono insiemi misurabili. Fissato $\delta \in (0,1)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo gli insiemi

$$E_n = \{x \in X : \delta\varphi(x) \le f_n(x)\}.$$

Dalla monotonia $f_n \le f_{n+1}$ segue che $E_n \subset E_{n+1}$, e inoltre dalla convergenza puntuale segue che

$$X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n.$$

Infatti, se $x \in X$ ed $f(x) > 0$ allora si ha $f_n(x) \to f(x) > \delta\varphi(x)$, e dunque $f_n(x) \ge \delta\varphi(x)$ per tutti gli n sufficientemente grandi.

Integrando la disuguaglianza $\delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) \le f_n(x)$ per $x \in X$, e passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu = L.$$

L'integrale al membro di sinistra è

$$\int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu = \sum_{i=1}^k \delta c_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Per la continuità della misura sulle successioni crescenti di insiemi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_i \cap E_n\Big) = \mu\Big(A_i \cap \bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) = \mu(A_i),$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu = \delta \sum_{i=1}^k c_i \mu(A_i) = \delta \int_X \varphi(x)\, d\mu.$$

Per $\delta \to 1^-$ nella disuguaglianza

$$\delta \int_X \varphi(x) d\mu \le L$$

si ottiene la tesi. □

Dal teorema della convergenza monotona segue il Lemma di Fatou.

Teorema 5.19 (Lemma di Fatou). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazo di misura e sia $f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni misurabili non negative, $f_n \ge 0$. Allora*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

Dim. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la funzione misurabile $g_n : X \to [0, \infty]$

$$g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad x \in X.$$

La successione $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente. Dal Teorema di Beppo Levi segue che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x) d\mu.$$

Dal momento che $g_n \leq f_n$, si ha

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu.$$

Questa è la tesi.

□

6. Convergenza dominata e Teorema di Lebesgue-Vitali

Il teorema della convergenza dominata è uno degli strumenti più flessibili per passare al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 6.20 (Convergenza dominata). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili tali che il limite*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

esista per μ-q.o. $x \in X$.

Se esiste una funzione $g \in L^1(X)$, detta maggiorante, tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f \in L^1(X)$ e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| \, d\mu = 0.$$

In particolare, questo implica che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu.$$

Dim. Le funzioni $g_n : X \to [0, \infty]$,

$$g_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|, \quad x \in X,$$

sono misurabili e positive, $g_n \geq 0$, in quanto $|f_n| \leq g$ ed $|f| \leq g$. Usando la convergenza puntuale $f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$ quando $n \to \infty$, per il Lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned} 2\int_X g(x) \, d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} g_n(x) d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu = 2\int_X g(x) \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} - \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu, \end{aligned}$$

che è equivalente a

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq 0,$$

che a sua volta è equivalente al fatto che il limite è zero. □

Il teorema della convergenza dominata non descrive in modo preciso (con un se e solo se) quando la convergenza puntuale implica quella in $L^1(X)$. Tale caratterizzazione è data dal Teorema di Lebesgue-Vitali e la nozione chiave è quella di *uniforme integrabilità*.

DEFINIZIONE 6.21. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Una famiglia di funzioni $\mathscr{F} \subset L^1(X)$ si dice uniformemente integrabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_A |f(x)| d\mu < \varepsilon$$

per ogni insieme $A \subset X$ misurabile.

TEOREMA 6.22 (Lebesgue-Vitali). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f_n \in L^1(X)$, $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che $f_n(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(A) *$f \in L^1(X)$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$;*

(B) *Valgono le due affermazioni:*
  (i) *La successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente integrabile.*
  (ii) *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\mu(X_\varepsilon) < \infty$ e*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

DIM. *A*) $\Rightarrow$ *B*). Proviamo la (i). Dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon, \text{ per ogni } n > \bar{n}.$$

Per l'assolutà continuità dell'integrale esistono $\delta_0, \delta_k > 0$, $k = 1, \dots, \bar{n}$, tali che

$$\mu(A) \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \int_A |f(x)| d\mu \leq \varepsilon, \quad \mu(A) \leq \delta_k \quad \Rightarrow \quad \int_A |f_k(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Scegliamo $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{\bar{n}}\}$. Ora, per $n > \bar{n}$ si ha

$$\int_A |f_n(x)| d\mu \leq \int_A |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_A |f(x)| d\mu \leq 2\varepsilon$$

non appena $\mu(A) \leq \delta$. Con questo la (i) è provata.

Passiamo alla (ii). Fissato $\varepsilon > 0$, per $t > 0$ consideriamo l'insieme $A_{0,t} = \{x \in X : |f(x)| \geq t\}$. Allora

$$\mu(A_{0,t}) = \int_{A_{0,t}} d\mu \leq \frac{1}{t} \int_X |f(x)| d\mu < \infty,$$

e inoltre, essendo $|f| \in L^1(X)$, dal teorema della convergenza monotona deriva che

$$\lim_{t \to 0} \int_{X \setminus A_{0,t}} |f(x)| d\mu = 0,$$

e quindi esiste $t_0 > 0$ tale che

$$\int_{X \setminus A_{0,t_0}} |f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Per ipotesi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon, \text{ per ogni } n > \bar{n}.$$

Per $k = 1, \dots, \bar{n}$ si considerano gli insiemi $A_{k,t} = \{x \in X : |f_k(x)| \ge t\}$. Per l'argomento precedente questi insiemi hanno misura finita e inoltre esistono $t_k > 0$ tali che

$$\int_{X \setminus A_{k,t_k}} |f_k(x)| d\mu \le \varepsilon, \quad k = 1, \dots, \bar{n}.$$

A questo punto si definisce $X_\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{\bar{n}} A_{k,t_k}$. Risulta $\mu(X_\varepsilon) < \infty$ e inoltre

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_k(x)| d\mu \le \int_{X \setminus A_{k,t_k}} |f_k(x)| d\mu \le \varepsilon, \quad k = 1, \dots, \bar{n}.$$

D'altra parte, per $n > \bar{n}$ si ha

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \le \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f(x)| d\mu \le 2\varepsilon.$$

Con questo anche la (ii) è provata.

$B) \Rightarrow A)$. Mostriamo preliminarmente che (i) e (ii) valgono anche per la funzione f. Ad esempio, usando il Lemma di Fatou

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f(x)| d\mu = \int_{X \setminus X_\varepsilon} \liminf_{n \to \infty} |f_n(x)| d\mu \le \liminf_{n \to \infty} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \le \varepsilon.$$

Analogamente si prova l'estensione della (ii).

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Esiste $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\mu(X_\varepsilon) < \infty$ e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon.$$

Inoltre esiste $\delta > 0$ tale che, se $\mu(A) < \delta$ allora

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon.$$

Per il teorema di Egorov esiste un insieme $Y_\varepsilon \subset X_\varepsilon$ tale che $\mu(X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon) < \delta$ ed $f_n \to f$ uniformemente su Y_ε. Ora si può scomporre l'integrale da stimare in questo modo

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_{X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_{Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu.$$

Grazie alla convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \bar{n}$ si ha

$$\int_{Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon.$$

Per la scelta di Y_ε, per l'ipotesi (i) si ha

$$\int_{X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon$$

uniformemente per $n \in \mathbb{N}$. In conclusione si ottiene

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \le 3\varepsilon, \quad \text{per ogni } n > \bar{n}.$$

Segue immediatamente che $f \in L^1(X)$. Il teorema è così interamente provato. $\square$

Esempio 6.23. Sia $X = (0,1)$ con la misura di Lebesgue. La successione di funzioni $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{se } 1/n \le x < 1, \end{cases}$$

converge a 0 in ogni punto $x \in (0,1)$ ed inoltre

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)| dx = 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tuttavia, non è uniformemente integrabile.

Esempio 6.24. Sia $X = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue. La successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

è uniformemente integrabile ed $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tuttavia non verifica la condizione (ii) nel Teorema di Lebesgue-Vitali.

Esercizio 6.1. Derivare il Teorema della convergenza dominata dal Teorema di Lebesgue-Vitali.

7. Derivata sotto il segno di integrale

Usiamo il teorema della convergenza dominata per provare un teorema di derivazione sotto segno di integrale.

Teorema 7.25. *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \times \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ una funzione con queste proprietà:*

i) *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $x \mapsto f(x,t)$ è integrabile.*
ii) *Per quasi ogni $x \in X$ la funzione $t \mapsto f(x,t)$ è derivabile.*
iii) *Fissato $t_0 \in \mathbb{R}$ esistono $\delta > 0$ e $g \in L^1(X)$ tali che*

$$\Big| \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \Big| \le g(x)$$

per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ e per q.o. $x \in X$.

Allora la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_X f(x,t) d\mu$$

è derivabile nel punto t_0 e risulta

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t} d\mu.$$

Dim. Osserviamo preliminarmente che per il punto iii) si ha

$$\frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t} \in L^1(X).$$

La misurabilità della funzione segue dal fatto di essere limite di funzioni misurabili (i rapporti incrementali).

Per la caratterizzazione sequenziale del limite è sufficiente verificare che per ogni successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a t_0 si può portare il limite del rapporto incrementale dentro l'integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0} d\mu. \tag{7.7}$$

Per il Teorema di Lagrange, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $t_n \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ e per μ-q.o. $x \in X$ esiste $\tau_n(x) \in (t_0, t_n)$ tale che

$$g_n(x) = \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0} = \frac{\partial f(x,\tau_n(x))}{\partial t},$$

e di conseguenza $|g_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande e per μ-q.o. $x \in X$. Siamo dunque nelle ipotesi del Teorema della convergenza dominata, che giustifica il passaggio al limite (7.7). □

8. Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

In questa sezione proviamo che una funzione è Riemann-integrabile precisamente quando l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Lebesgue nulla. Poi proviamo che tutte le funzioni Riemann-integrabili sono Lebesgue integrabili e che i due integrali coincidono.

Ricordiamo che l'oscillazione di una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ su un insieme $I \subset [0,1]$ è definita nel seguente modo

$$\omega(f,I) = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in I\}.$$

Poi, l'oscillazione locale di f nel punto $x \in [0,1]$ è

$$\omega(f,x) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega(f, I_\delta(x)) = \inf_{\delta>0} \omega(f, I_\delta(x)),$$

dove $I_\delta(x) = \{y \in [0,1] : |x-y| < \delta\}$.

Osserviamo che per ogni $t > 0$ l'insieme $E_t = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) < t\}$ è aperto relativamente a $[0,1]$, ovvero il complementare è chiuso, ovvero la funzione $x \mapsto \omega(f,x)$ è superiormente semicontinua. Infatti, se $x \in E_t$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(f, I_\delta(x)) < t$ e quindi per ogni $y \in I_\delta(x)$ esiste un $\delta' > 0$ tale che $I_{\delta'}(y) \subset I_\delta(x)$ e dunque

$$\omega(f,y) \leq \omega(f, I_{\delta'}(y)) \leq \omega(f, I_\delta(x)) < t.$$

La funzione f è continua nel punto $x \in [0,1]$ se e solo se $\omega(f,x) = 0$, e l'insieme

$$D(f) = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) > 0\}$$

è l'insieme dei punti di discontinuità di f.

Lemma 8.26. *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Supponiamo che per ogni $x \in [0,1]$ risulti $\omega(f,x) < \varepsilon$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(f,I) < \varepsilon$ per ogni intervallo $I \subset [0,1]$ con $\mathscr{L}^1(I) < \delta$.*

Dim. Per ogni $x \in [0,1]$ esiste $\delta_x > 0$ tale che $\omega(f, I_{\delta_x}(x)) < \varepsilon$. La famiglia di intorni $\{I_{\delta_x/2}(x) : x \in [0,1]\}$ è un ricoprimento aperto di $[0,1]$ dal quale è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $\{I_{\delta_i/2}(x_i) : i = 1,\dots,n\}$, dove $\delta_i = \delta_{x_i}$. Scegliendo

$\delta = \min\{\delta_i/2 : i = 1, \dots, n\}$, allora per ogni $x \in [0,1]$ esiste i tale che $I_\delta(x) \subset I_{\delta_i}(x_i)$, e pertanto

$$\omega(f, I_\delta(x)) \le \omega(f, I_{\delta_i}(x_i)) < \varepsilon.$$

□

TEOREMA 8.27. *Una funzione limitata $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è Riemann-integrabile se e solo se $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$.*

DIM. Proviamo che se $\mathscr{L}^1(D(f)) > 0$ allora f non è Riemann-integrabile. Siccome

$$D(f) = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^\infty \left\{x \in [0,1] : \omega(f,x) \ge \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^\infty D_k,$$

esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{L}^1(D_k) > 0$.

Sia σ una suddivisione di $[0,1]$ e indentifichiamo σ con la famiglia degli intervalli associati $\sigma = \{I\}$. Indichiamo con $S(f,\sigma)$ e $s(f,\sigma)$ le somme inferiori e superiori di f relative a σ. Allora avremo

$$\begin{aligned} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) &= \sum_{I \in \sigma} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I_i) \ge \sum_{\mathrm{int}(I) \cap D_k \ne \emptyset} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I) \\ &\ge \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{int}(I) \cap D_k \ne \emptyset} \mathscr{L}^1(I) \ge \frac{1}{k}\mathscr{L}^1(D_k). \end{aligned}$$

Infatti si ha

$$\mathscr{L}^1(D_k) \le \sum_{\mathrm{int}(I) \cap D_k \ne \emptyset} \mathscr{L}^1(I)$$

e inoltre $\omega(f,I) \ge \omega(f,x) \ge 1/k$ per qualche $x \in \mathrm{int}(I) \cap D_k$. Questo prova la non integrabilità di f.

Proviamo che se $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$ allora f è Riemann-integrabile. Mostreremo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[0,1]$ tale che $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le \varepsilon$. Come sopra, avremo $D(f) = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$, e siccome $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$ risulta $\mathscr{L}^1(D_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una famiglia al più numerabile $\mathscr{F}_1 = \{I\}$ di intervalli (aperti o, equivalentemente, chiusi) tali che $D_k \subset \bigcup_{I \in \mathscr{F}_1} I$ e

$$\sum_{I \in \mathscr{F}_1} \mathscr{L}^1(I) \le \varepsilon.$$

L'insieme D_k è un sottoinsieme chiuso di $[0,1]$ e quindi è compatto. Dunque, possiamo supporre che la famiglia $\mathscr{F}_1$ sia finita. Avremo allora

$$[0,1] \setminus \bigcup_{I \in \mathscr{F}_1} \mathrm{int}(I) = \bigcup_{I \in \mathscr{F}_2} I$$

per una famiglia finita $\mathscr{F}_2$ di intervalli chiusi disgiunti. Poichè $\omega(f,x) < 1/k$ per ogni $x \in I$, $I \in \mathscr{F}_2$, dal Lemma 8.26 segue che $\bigcup_{I \in \mathscr{F}_2} I = \bigcup_{I \in \mathscr{F}_3} I$ per una famiglia finita $\mathscr{F}_3$ di intervalli chiusi essenzialmente disgiunti tali che $\omega(f,I) < 1/k$ per ogni $I \in \mathscr{F}_3$. Due intervalli I e J sono essenzialmente disgiunti se $\mathscr{L}^1(I \cap J) = 0$, cioè se si intersecano al più in un punto.

Sia σ la suddivisione di $[0,1]$ univocamente determinata dalla famiglia di intervalli $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_3$. Allora, detto $M = \sup_{[0,1]} |f|$, si trova

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\sigma} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I) &= \sum_{I\in\mathscr{F}_1} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I) + \sum_{I\in\mathscr{F}_3} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I)\\ &\le 2M \sum_{I\in\mathscr{F}_1} \mathscr{L}^1(I) + \frac{1}{k} \le (2M+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

non appena $k > 1/\varepsilon$. $\square$

Teorema 8.28. *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata Riemann-integrabile. Allora f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono.*

Dim. Mostriamo che f è una funzione misurabile. Sia $t \in \mathbb{R}$ e proviamo che l'insieme $E_t = \{x \in [0,1] : f(x) < t\}$ è misurabile. Sia $D(f) = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) > 0\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f. Per il Teorema 8.27 risulta $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$. Per un esercizio visto in classe segue che f è misurabile.

Sappiamo che se f è Riemann-integrabile, allora anche le parti positiva e negativa $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, $x \in [0,1]$, sono Riemann-integrabili. Quindi non è restrittivo supporre $f \ge 0$. Indichiamo con $S(f)$ l'insieme delle funzioni semplici minoranti di f ed indichiamo con $S([0,1])$ l'insieme delle suddivisioni di $[0,1]$. Allora avremo

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sup_{\sigma\in S([0,1])} \sum_{I\in\sigma} \mathscr{L}^1(I) \inf_I f \le \sup_{\varphi\in S(f)} \int_{[0,1]} \varphi(x)\,dx = \int_{[0,1]} f(x)\,dx.$$

Infatti, ad ogni suddivisione $\sigma = \{I\}$ di $[0,1]$ corrisponde la funzione semplice $\varphi(x) = \sum_{I\in\sigma} (\inf_I f)\chi_I(x) \in S(f)$.

Proviamo la disuguaglianza opposta. Sia σ una suddivisione di $[0,1]$ e sia $\varphi \in S(f)$ una funzione semplice che minora la funzione f, $0 \le \varphi \le f$ su $[0,1]$. Avremo

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in [0,1],$$

dove $c_i \ge 0$, gli insiemi A_i sono misurabili e $\bigcup_{i=1}^n A_i = [0,1]$ con unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \varphi(x)dx &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{[0,1]} \chi_{A_i}(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{I\in\sigma} \int_I \chi_{A_i}(x)dx = \sum_{I\in\sigma} \int_I \sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}(x)dx\\ &\le \sum_{I\in\sigma} \mathscr{L}^1(I) \sup_{x\in I} f(x).\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varphi \in S(f)$ nell'insieme delle funzioni semplici minoranti e di σ nell'insieme delle suddivisioni di $[0,1]$ segue che

$$\int_{[0,1]} f(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx.$$

$\square$

CHAPTER 3

Spazi di funzioni integrabili

1. Spazi L^p. Disuguaglianze di Hölder e Minkowski

Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e indichiamo con $\mathscr{M}(X)$ lo spazio vettoriale (reale) delle funzioni $f : X \to [-\infty, \infty]$ che sono μ-misurabili.

Per $1 \le p < \infty$, si definisce l'insieme di funzioni

$$L^p(X) = \Big\{ f \in \mathscr{M}(X) : \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \Big\}. \tag{1.8}$$

Vedremo che si tratta di uno spazio vettoriale reale. È ben definita la funzione $\| \cdot \|_p : X \to [0, \infty)$

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f(x)|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.9}$$

Quando $p = 2$ questa seminorma nasce da un prodotto scalare. Date $f, g \in L^2$ si definisce

$$\langle f, g \rangle_{L^2(X)} = \int_X f(x) g(x) \, d\mu.$$

Vedremo fra breve che l'integrale converge.

Estendiamo la definizione al caso $p = \infty$. L'estremo superiore essenziale di una funzione $f \in \mathscr{M}(X)$ è

$$\|f\|_\infty = \inf \big\{ M \ge 0 : |f(x)| \le M \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X \big\}.$$

Se l'insieme di cui si prende l'estremo inferiore è vuoto, si pone $\|f\|_\infty = \infty$. Possiamo dunque definire l'insieme delle funzioni essenzialmente limitate

$$L^\infty(X) = \big\{ f \in \mathscr{M}(X) : \|f\|_\infty < \infty \big\}. \tag{1.10}$$

Diciamo che due esponenti $1 \le p, q \le \infty$ sono Hölder-coniugati se si ha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

dove usiamo la convenzione $1/\infty = 0$. L'esponente $p = 2$ coincide col suo coniugato.

Proposizione 1.29 (Disuguaglianza di Hölder). *Siano $1 \le p, q \le \infty$ esponenti di Hölder coniugati. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ allora $fg \in L^1(X)$ e*

$$\int_X |f(x) g(x)| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.11}$$

Inoltre, nel caso $1 < p, q < \infty$, se si ha uguaglianza allora esiste $\lambda > 0$ tale che $|g(x)| = \lambda |f(x)|^{p-1}$ per μ-q.o. $x \in X$.

Dim. Il caso limite $p = 1$ e $q = \infty$ è chiaro, perchè

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \le \|g\|_\infty \int_X |f(x)|\, d\mu.$$

Se c'è uguaglianza dovra essere $|g(x)| = \|g\|_\infty$ per q.o. $x \in \{|f| > 0\}$.

Passiamo al caso $1 < p < \infty$ e quindi $q = \frac{p}{p-1}$. Ricordiamo la disuguaglianza di Young. Se $x, y \ge 0$ sono numeri reali, allora

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{1.12}$$

Dividendo per $y^q \ne 0$, e ponendo $t = x/y^{\frac{1}{p-1}} \ge 0$ si ottiene la disuguaglianza equivalente

$$t \le \frac{t^p}{p} + 1 - \frac{1}{p}, \quad t \ge 0,$$

la cui validità può essere verificata facilmente con uno studio di funzione. Si ha uguaglianza se e solo se $t = 1$, e quindi in (1.12) si ha uguaglianza se e solo se $y = x^{p-1}$.

Passando alla disuguaglianza di Hölder, usando la disuguaglianza di Young puntualmente dentro l'integrale si trova

$$\begin{aligned}\int_X \frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q}\, d\mu &\le \int_X \Big(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}\Big) d\mu \\ &= \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_X |g|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\end{aligned}$$

e quindi si ottiene la (1.11). Se si ha uguaglianza in (1.11), allora deve esserci uguaglianza q.o. nella disuguaglianza dentro l'integrale. Quindi deve essere

$$\frac{|g|}{\|g\|_q} = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}, \quad \mu\text{-q.o. su } X.$$

Questo termina la dimostrazione. Abbiamo usato l'ipotesi $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ per poter dividere per le norme di f e g all'inizio dell'argomento. □

Proposizione 1.30 (Disuguaglianza di Minkowski). *Per ogni* $1 \le p \le \infty$ *e per ogni* $f, g \in L^p(X)$ *si ha*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.13}$$

Dim. Il caso $p = \infty$ è elementare e la verifica è lasciata come esercizio.

Ricordiamo innanzi tutto che per ogni $1 \le p < \infty$ esiste una costante $C_p > 0$ tale che per ogni coppia di numeri reali $x, y \ge 0$ si ha

$$(x + y)^p \le C_p(x^p + y^p). \tag{1.14}$$

Da tale disuguaglianza segue che $f + g \in L^p(X)$.

Sia ora $1 < q \leq \infty$ l'esponende di Hölder coniugato di p. Usando la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|^{p-1}|f+g|d\mu \\ &\leq \int_X |f+g|^{p-1}|f|d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g|d\mu \\ &\leq \||f+g|^{p-1}\|_q(\|f\|_p + \|g\|_p).\end{aligned}$$

Ora dividiamo a destra e a sinistra per $\||f+g|^{p-1}\|_q = \|f+g\|_p^{p-1}$. Lo possiamo fare perchè questa quantità è finita e possiamo anche supporla diversa da zero. Se fosse $\|f+g\|_p = 0$ non ci sarebbe infatti nulla da dimostrare. Ma $\|f+g\|_p^p \||f+g|^{p-1}\|_q^{-1} = \|f+g\|_p$ e la tesi segue. □

Esempio 1.31. Sia $X = [0,1]$ con la misura di Lebesgue e siano $1 \leq p < \infty$ e $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Sia $\{q_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una enumerazione dei razionali e definiamo la funzione $f : [0,1] \to [0,\infty]$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i |x - q_i|^\alpha}, \quad x \in [0,1].$$

La funzione f è misurabile ed assume il valore ∞ almeno su tutto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Per la disuguaglianza di Minkowski e per il teorema della convergenza monotona, si ha

$$\begin{aligned}\Big(\int_{[0,1]} |f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} &= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{[0,1]} \Big|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i|x-q_i|^\alpha}\Big|^p dx\Big)^{1/p} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\int_{[0,1]} \frac{1}{2^{ip}|x-q_i|^{\alpha p}}\, dx\Big)^{1/p} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\Big(\int_{[-1,1]} \frac{1}{|x|^{\alpha p}}\, dx\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\frac{2}{1-\alpha p}\Big)^{1/p} < \infty.\end{aligned}$$

Dunque si ha $f \in L^p([0,1])$ ed in particolare la serie che definisce la funzione f converge ad un valore finito per q.o. $x \in [0,1]$.

2. Inclusioni fra spazi L^p

In questa sezione esaminiamo alcune relazioni di inclusione fra spazi $L^p(X)$.

1. Supponiamo che X sia di misura finita, $\mu(X) < \infty$, e siano $1 \leq p < q \leq \infty$. Allora $L^q(X) \subset L^p(X)$. Se, infatti, $f \in L^q(X)$, allora

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \mu(X)^{\frac{1}{(q/p)'}} \Big(\int_X |f|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{(q/p)}} < \infty,$$

dove $(q/p)'$ indica l'esponente di Hölder coniugato di q/p.

2. Se una funzione sta in due diversi spazi di Lebesgue, sta anche in tutti quelli intermedi. Siano $1 \leq p < q < \infty$, e supponiamo che $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$, allora

$f \in L^r(X)$ per ogni $p < r < q$. Infatti, si ha $r = tp + (1-t)q$ per un certo $t \in (0,1)$, e dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$\int_X |f|^r d\mu \le \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^t \Big(\int_X |f|^q d\mu\Big)^{1-t} < \infty.$$

3. Se una funzione sta in tutti gli spazi L^p (sufficientemente elevati) con norma uniformemente limitata, allora sta anche in L^∞. Precisamente, supponiamo che $f \in L^p(X)$ con $\|f\|_p \le M < \infty$ per ogni $1 \le p < \infty$. Allora $\|f\|_\infty \le M$.

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e proviamo che l'insieme

$$A = \{x \in X : |f(x)| \ge M + \varepsilon\}$$

ha misura nulla. Infatti

$$\mu(A) = \int_A d\mu \le \frac{1}{(M+\varepsilon)^p} \int_X |f(x)|^p d\mu \le \Big(\frac{M}{M+\varepsilon}\Big)^p \to 0$$

per $p \to \infty$. Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario segue che $\|f\|_\infty \le M$. □

Esempio 2.32. Sia $X = [0,1]$ con la misura di Lebsgue e si consideri la funzione $f(x) = |\log x|$, $x \in [0,1]$. Per ogni $1 \le p < \infty$ esiste una costante $C_p > 0$ tale che

$$\sqrt{x}|\log x|^p \le C_p, \quad x \in (0,1].$$

Siccome $1/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$ segue che $f \in L^p([0,1])$ per ogni $p \ge 1$. Tuttavia $f \notin L^\infty([0,1])$.

3. Teorema di Completezza

Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che $L^p(X)$ è chiuso per somma di funzioni, e dunque è uno spazio vettoriale. Per ogni $1 \le p \le \infty$, la semininorma $\|\cdot\|_p : L^p(X) \to [0,\infty)$ verifica le seguenti proprietà:

i) $\|f\|_p \ge 0$ per ogni $f \in L^p(X)$ ed $\|f\|_p = 0$ implica che $f = 0$ μ-q.o.;
ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in L^p(X)$;
iii) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ per ogni $f, g \in L^p(X)$.

Per avere uno spazio normato (invece che solo seminormato) occorre identificare le funzioni che sono uguali quasi ovunque. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $L^p(X)$

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in X : f(x) \ne g(x)\}) = 0.$$

Indichiamo con $\mathscr{L}^p(X) = L^p(X)/\sim$ il quoziente munito della norma $\|\cdot\|_p$, che non dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza. Ora $(\mathscr{L}^p(X), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato.

Teorema 3.33 (Completezza). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Per ogni $1 \le p \le \infty$, $\mathscr{L}^p(X)$ è uno spazio di Banach. In particolare, $\mathscr{L}^2(X)$ è uno spazio di Hilbert.*

Dim. Abbiamo già osservato che $\mathscr{L}^p(X)$ é uno spazio vettoriale normato. Dobbiamo provare che è uno spazio metrico completo per la distanza indotta dalla norma. Vediamo la prova nel caso $1 \le p < \infty$. Scegliamo a nostro piacere rappresentanti nelle classi di equivalenza. Sia $f_n \in L^p(X)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di Cauchy. Esiste una sottosuccessione $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|_p\leq \frac{1}{2^i}$ per ogni $i\in\mathbb{N}$. La funzione $g: X\to[-\infty,\infty]$

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|,\quad x\in X,$$

è misurabile ed è finita in μ-q.o. punto $x\in X$. Infatti, per la disuguaglianza di Minkowski generalizzata al caso di somme numerabili si ha

$$\|g\|_p\leq\sum_{i=1}^{\infty}\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|_p\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\leq 1.$$

Dunque, è definita per μ-q.o. punto $x\in X$ anche la funzione $f: X\to\mathbb{R}$

$$f(x)=f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x))=\lim_{i\to\infty}f_{n_i}(x),\quad \text{per q.o. } x\in X.$$

Proviamo che la funzione f è il limite della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nella distanza indotta dalla norma $\|\cdot\|_p$. Precisamente, affermiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n(x)-f(x)|^p d\mu=0.$$

Infatti, fissato $\varepsilon>0$ usando il Lemma di Fatou e la condizione di Cauchy si vede che esiste $\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che

$$\begin{aligned}\int_X|f_n(x)-f(x)|^p d\mu&=\int_X\lim_{i\to\infty}|f_n(x)-f_{n_i}(x)|^p d\mu\\&\leq\liminf_{i\to\infty}\int_X|f_n(x)-f_{n_i}(x)|^p d\mu\leq\varepsilon,\end{aligned}$$

pur di prendere $n\geq\bar{n}$. Dalla disuguaglianza (1.14) si trova

$$\int_X|f|^p d\mu\leq C_p\int_X(|f-f_n|^p+|f_n|^p)d\mu,$$

e dunque $f\in L^p(X)$.

Consideriamo il caso $p=\infty$. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(X)$ e definiamo per ogni $m,n,k\in\mathbb{N}$ gli insiemi

$$\begin{aligned}A_{mn}&=\{x\in X:|f_m(x)-f_n(x)|>\|f_m-f_n\|_\infty\},\\B_k&=\{x\in X:|f_k(x)|>\|f_k\|_\infty\}.\end{aligned}$$

Tutti questi insiemi hanno misura nulla, e dunque anche l'insieme

$$E=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k\cup\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}}A_{mn},$$

ha misura nulla, $\mu(E)=0$. Sul complementare $X\setminus E$, la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy e dunque converge uniformemente ad una funzione limitata f. □

Corollario 3.34. *Sia $(X,\mathscr{A},\mu)$ uno spazio di misura e sia $1\leq p\leq\infty$. Sia $f_n\in L^p(X)$, $n\in\mathbb{N}$, una successione di funzioni convergente in norma ad una funzione $f\in L^p(X)$. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente puntualmente ad f μ-q.o.*

Dim. Poichè $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, l'affermazione segue dalla dimostrazione del teorema di completezza. □

4. Convergenza forte, debole, in misura e q.o.

Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Introduciamo e confrontiamo fra alcune nozioni di convergenza per successioni di funzioni (convergenza sequenziale). In generale, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sarà una successione di funzioni misurabili su X a valori in $[-\infty, \infty]$ ed f sarà una candidata funzione limite.

4.1. Convergenza forte. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Diremo che $f_n \to f$ fortemente in $L^p(X)$ se $f_n, f \in L^p(X)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Sappiamo che in questo caso esiste una sottosuccessione $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ che converge q.o. ad f.

Esempio 4.1. In generale la convergenza forte non implica che $f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$. Si consideri $X = [0, 1]$ con la misura di Lebesgue e la successione di funzioni definita in questo modo:

$$\begin{aligned}
&f_1 = \chi_{[0,1]}, \\
&f_2 = \chi_{[0,1/2]}, \quad f_3 = \chi_{[1/2,1]}, \\
&f_4 = \chi_{[0,1/4]}, \quad f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}, \quad f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}, \quad f_7 = \chi_{[3/4,1]} \\
&f_8 = \chi_{[0,1/8]}, \quad \dots
\end{aligned}$$

Chiaramente, per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1,$$

mentre $\|f_n\|_p \to 0$ per ogni $1 \leq p < \infty$ (ma non per $p = \infty$).

4.2. Convergenza debole. La nozione di convergenza debole nasce dalla nozione di topologia debole su $L^p(X)$ e dal teorema di dualità fra spazi $L^p(X)$. Ne diamo qui una presentazione autosufficiente ed equivalente.

Sia $1 \leq p < \infty$. Diremo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente ad f in $L^p(X)$ se $f_n, f \in L^p(X)$ e per ogni $g \in L^q(X)$, con $1 < q \leq \infty$ esponente di Hölder coniugato di p, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)g(x)d\mu = \int_X f(x)g(x)d\mu.$$

La convergenza debole si indica talvolta in questo modo $f_n \rightharpoonup f$ in L^p.

La convergenza forte implica quella debole. Questo segue dalla disuguaglianza di Hölder:

$$\Big| \int_X f_n g\, d\mu - \int_X f g\, d\mu \Big| \leq \int_X |f_n - f||g| d\mu \leq \|f_n - f\|_p \|g\|_q.$$

Questa considerazione ha senso anche quando $p = \infty$. Ma per $p = \infty$ quella data sopra non sarebbe la definizione corretta di convergenza debole ed abbiamo per tale motivo escluso questo caso.

In alcuni casi è sufficiente verificare il test di convergenza debole per una classe ristretta di funzioni.

Lemma 4.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto con la misura di Lebesgue e sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p(A)$, $1 < p < \infty$, tale che $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p < \infty$. Allora, si ha $f_k \rightharpoonup f \in L^p(A)$ in $L^p(A)$-debole se e solo se*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)\varphi(x)dx = \int_A f(x)\varphi(x)dx$$

per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(A)$, di classe C^∞ con supporto compatto in A.

Dim. Proviamo l'implicazione non banale. Data $g \in L^q(A)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\varphi \in C_c^\infty(A)$ tale che $\|g - \varphi\|_q < \varepsilon$. La dimostrazione di questo fatto è nel Teorema 6.5. Dunque, con la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\begin{aligned}\Big|\int_A f_k g\,dx - \int_A f g\,dx\Big| &\leq \Big|\int_A f_k\varphi\,dx - \int_A f\varphi\,dx\Big| + \Big|\int_A f_k(g-\varphi)\,dx - \int_A f(g-\varphi)dx\Big| \\ &\leq \Big|\int_A f_k\varphi\,dx - \int_A f\varphi\,dx\Big| + (\|f_k\|_p\| + \|f\|_p)\|g-\varphi\|_q \\ &\leq \Big|\int_A f_k\varphi\,dx - \int_A f\varphi\,dx\Big| + C\varepsilon,\end{aligned}$$

per una costante $0 \leq C < \infty$ indipendente da k, e quindi

$$\limsup_{k\to\infty} \Big|\int_A f_k g\,dx - \int_A f g\,dx\Big| \leq C\varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. La tesi segue. □

Esempio 4.2. La convergenza debole non implica quella forte. Si consideri $X = (0,\pi)$ con la misura di Lebesgue e sia $f_n(x) = \sin(nx) \in L^p(0,\pi)$, $n \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$. La successione è anche in L^1 ed L^∞, ma non consideriamo questi casi. Affermiamo che

$$f_n \rightharpoonup 0 \text{ debolmente in } L^p(0,\pi).$$

Per il Lemma 4.1, e sufficiente verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \varphi(x)\sin(nx)dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(0,\pi)$. Con un'integrazione per parti si trova

$$\int_0^\pi \varphi(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos(nx)dx,$$

essendo $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Siccome $\|\varphi'\cos(nx)\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty < \infty$, l'affermazione segue. In ultima analisi, la convergenza debole a 0 è prodotta dalle oscillazioni della successione, che diventano sempre più frequenti.

D'altra parte, si ha

$$\int_0^\pi |\sin(nx)|^p dx = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\sin t|^p dt = \int_0^\pi |\sin t|^p dt > 0,$$

e quindi la successione non converge fortemente a 0 in $L^p(0,\pi)$.

Esempio 4.3. La convergenza puntuale non implica quella debole. Ad esempio, la successione $f_n = n\chi_{(0,1/n]} \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, converge a 0 in ogni punto, tuttavia

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

per ogni funzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Quindi non c'è convergenza a 0 in $L^1(\mathbb{R})$-debole.

Esercizio 4.1. La convergenza debole non implica quella puntuale, nemmeno per opportune sottosuccesioni. Cercare di provare questa affermazione costruendo un esempio.

4.3. Convergenza in misura. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e siano $f, f_n \in \mathscr{M}(X)$ funzioni misurabili, $n \in \mathbb{N}$. Si dice che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in misura ad f (e scriveremo "$f_n \to f$ in misura") se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$

Prima di descrivere il legame fra convergenza in misura, convergenza quasi ovunque e convergenza in L^1 premettiamo alcuni fatti generali.

Definizione 4.1. I limiti inferiore e superiore di una successione di insiemi $E_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, si definiscono nel seguente modo

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Lemma 4.2 (Borel-Cantelli). *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili in X. Allora:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\big(\limsup_{n\to\infty} E_n\big) = 0.$$

Dim. È sufficiente osservare che

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'espressione a destra converge a zero in quanto resto di una serie convergente. □

Nella seguente proposizione descriviamo il legame fra convergenza in misura e quasi ovunque.

Teorema 4.3. *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e siano $f, f_n \in \mathscr{M}(X)$ funzioni misurabili, $n \in \mathbb{N}$. Allora:*

i) *Se $\mu(X) < \infty$ ed $f_n(x) \to f(x)$ per μ-q.o. allora $f_n \to f$ in misura.*
ii) *Se $f_n \to f$ in misura, allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$.*

Dim. Proviamo la (i). Dato $\eta > 0$, per il teorema di Egorov esiste un insieme misurabile $X_\eta \subset X$ tale che $\mu(X \setminus X_\eta) \leq \eta$ ed $f_n \to f$ uniformemente su X_η. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \eta + \mu(\{x \in X_\eta : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}).$$

Daltra parte, per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\mu(\{x \in X_\eta : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_\eta} |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \eta.$$

e la tesi segue.

Proviamo la ii). Dalla definizione di convergenza in misura segue che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\Big(\Big\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\Big\}\Big) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Posto $A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 1/2^k\}$, la seguente serie converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty,$$

e per il lemma di Borel-Cantelli

$$\mu\Big(\limsup_{k\to\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} A_k\Big) = 0.$$

Pertanto, l'insieme

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} A_k$$

ha misura nulla e per ogni $x \in X \setminus A$ esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq j$ si ha

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Questo prova che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$. $\square$

Teorema 4.4. *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e siano $f, f_n \in L^1(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Se $f_n \to f$ in $L^1(X)$ forte allora $f_n \to f$ in misura. Il viceversa non è vero nemmeno per sottosuccessioni.*

Dim. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu,$$

e la tesi segue. La costruzione di un controesempio è lasciata come esercizio. $\square$

Teorema 4.5. *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $\mu(X) < \infty$, e siano $f, f_n \in \mathscr{M}(X)$ funzioni misurabili, $n \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

A) *$f_n \to f$ in misura.*

B) *Si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu = 0.$$

Dim. A)$\Rightarrow$B) Non è restrittivo supporre $f = 0$. Partiamo dall'identità

$$\int_X \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx = \int_0^1 \mu\Big(\Big\{x \in X : |f_n(x)| \geq \frac{t}{1-t}\Big\}\Big) dt = \int_0^1 \varphi_n(t) dt,$$

dove abbiamo posto

$$\varphi_n(t) = \mu\Big(\Big\{x \in X : |f_n(x)| \geq \frac{t}{1-t}\Big\}\Big).$$

Se vale A), allora per ogni $t \in (0,1)$ esiste il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0.$$

Dunque, per il Teorema della convergenza dominata si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) dt = 0.$$

La prova dell'implicazione inversa è lasciata come esercizio.

□

5. Regolarizzazioni

In questa sezione introduciamo la teoria delle regolarizzazioni di funzioni in $\mathbb{R}^n$, su cui fissiamo la misura di Lebesgue.

5.1. Nucleo di regolarizzazione. Sia $\chi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ la funzione

$$\chi(x) = \begin{cases} c_0 \exp\Big(\dfrac{1}{|x|^2-1}\Big), & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Chiaramente si ha $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. La costante $c_0 > 0$ è fissata in modo tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo le funzioni $\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Queste funzioni verificano le seguenti proprietà:

i) $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
ii) $\chi_\varepsilon \geq 0$ e $\chi_\varepsilon(x) > 0$ se e solo se $|x| < \varepsilon$;
iii) Per le proprietà di invarianza della misura di Lebesgue rispetto alle dilatazioni si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) dy = 1. \tag{5.15}$$

Dunque, per $\varepsilon \to 0$ l'integrale si concentra in $x = 0$. La famiglia di funzioni $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ si dice nucleo di regolarizzazione o anche approssimazione dell'unità.

5.2. Regolarizzazione di funzioni localmente integrabili. Una funzione $\mathscr{L}^n$-misurabile $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ si dice localmente integrabile, e scriveremo $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, se per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si ha $f \in L^1(K)$.

DEFINIZIONE 5.1. Data una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \chi_\varepsilon * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Abbiamo usato la notazione $*$ per la convoluzione. L'integrale converge perchè l'integrazione è ristretta alla palla $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \varepsilon\}$. Con il cambio di variabile $x - y = z$, fatto a x fissato, l'integrale può essere trasformato nel seguente modo

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \chi_\varepsilon(y) dy = f * \chi_\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ricordiamo che il supporto di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ è l'insieme (chiuso)

$$\mathrm{spt}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

TEOREMA 5.2 (Proprietà della regolarizzazione). *Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

i) *Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
ii) *Detto $K = \mathrm{spt}(f)$ si ha $\mathrm{spt}(f_\varepsilon) \subset K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$, per ogni $\varepsilon > 0$.*
iii) *Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$ è continua, allora $f_\varepsilon \to f$ per $\varepsilon \to 0^+$ uniformemente sui compatti.*
iv) *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ allora $\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p$.*

DIM. i) Proviamo che f_ε è una funzione continua in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se $|x - x_0| \leq 1$ allora $\mathrm{spt}(\chi_\varepsilon(\cdot - x)) \subset K = \bar{B}_{1+\varepsilon}(x_0)$. Siccome χ_ε è limitata ed $f \in L^1(K)$, per il Teorema della convergenza dominata si può portare il limite $x \to x_0$ dentro l'integrale

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f_\varepsilon(x) &= \lim_{x \to x_0} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x \to x_0} \chi_\varepsilon(x-y) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x_0-y) f(y) dy = f_\varepsilon(x_0).
\end{aligned}$$

In modo analogo, essendo per ogni $i = 1, \ldots, n$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\Big| \frac{\partial \chi_\varepsilon(x-y)}{\partial x_i} \Big| \leq \|\nabla \chi_\varepsilon\|_\infty,$$

è possibile derivare sotto segno di integrale

$$\frac{\partial f_\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

Come per la continuità di f_ε si dimostra che la funzione

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_\varepsilon(x-y) f(y) dy$$

è continua, e quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Ora per induzione si prova che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii) Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathrm{dist}(x, K) > \varepsilon$. Per continuità della funzione distanza, esiste $\delta > 0$ tale che $\mathrm{dist}(z, K) > \varepsilon$ per ogni $z \in B_\delta(x)$. Se $f(y) \neq 0$ allora $y \in K$ e dunque

$$|z - y| \geq \mathrm{dist}(z, K) > \varepsilon.$$

Quindi $f(y) \neq 0$ implica $\chi_\varepsilon(z - y) = 0$ e questo prova che $f_\varepsilon(z) = 0$. Dunque, x è un punto interno dell'insieme $\{f_\varepsilon = 0\}$ e pertanto $\mathrm{spt}(f_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$.

iii) Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto allora anche l'insieme $K_1 = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{dist}(x, K) \leq 1\}$ è compatto, essendo chiuso e limitato. Essendo f continua su K_1, allora è uniformemente continua: per ogni $\sigma > 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$x, y \in K_1 \text{ e } |x - y| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \sigma.$$

Siano $x \in K$ ed $0 < \varepsilon < 1$. Dalla proprietà (5.15) del nucleo di regolarizzazione segue che

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)(f(y) - f(x))dy,$$

dove l'integrazione è ristretta all'insieme $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\} \subset K_1$. Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo si ha $|f(y) - f(x)| < \sigma$ per ogni $x \in K$ e per ogni y tale che $|x - y| < \varepsilon$, e quindi

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y) - f(x)|dy \leq \sigma \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)dy = \sigma.$$

Abbiamo usato il fatto che $\chi_\varepsilon \geq 0$. Questo prova la convergenza uniforme su K.

iv) Sia ora $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ e sia $1 < q < \infty$ l'esponente di Hölder coniugato. I casi $p = 1$ e $p = \infty$ sono più facili. Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} |f(y)|dy \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)dy \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, usando il Teorema di Fubini-Tonelli sullo scambio dell'ordine di integrazione si trova

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y)|^p dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy.
\end{aligned}$$

Nella prossima sezione proveremo che $f_\varepsilon \to f$ in L^p-forte. □

6. Convergenza in media e Teorema di Riemann-Lebesgue

Il punto di partenza di questa sezione è il Teorema di densità, la cui dimostrazione è rinviata.

Teorema 6.3 (Densità). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per ogni $1 \leq p < \infty$, l'insieme delle funzioni continue con supporto compatto in A è denso in $L^p(A)$:*

$$\overline{C_c(A)}^{L^p(A)} = L^p(A).$$

Qui stiamo supponendo di avere la misura di Lebesgue su A. Il teorema di densità ha una formulazione più generale negli spazi metrici localmente compatti con una misura di Radon.

Teorema 6.4. *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora:*

i) *Vale la "continuità in media"*

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

ii) *Le regolarizzazioni convergono in L^p-forte:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

Dim. i) Fissato $\sigma > 0$, per il Teorema di densità esiste una funzione $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f - g\|_p \leq \sigma$. Siccome g è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|h| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x+h) - f(x)| \leq \sigma.$$

Di conseguenza, detto $K = \mathrm{spt}(g)$ il supporto di g e posto $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) \leq 1\}$, per $|h| \leq \varepsilon \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx\Big)^{1/p} &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - g(x+h)|^p dx\Big)^{1/p} + \\
&\quad + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+h) - g(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\
&\quad + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\
&= 2\|f - g\|_p + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+h) - g(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\
&\leq \sigma(2 + \mathscr{L}^n(K_1)).
\end{aligned}$$

Questo prova la prima affermazione.

ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha, come nella dimostrazione del precedente teorema,

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \Big|\int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h)(f(x+h) - f(x))dh\Big| \leq \Big(\int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h)|f(x+h) - f(x)|^p dh\Big)^{1/p},$$

e dunque, usando il Teorema di Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h)|f(x+h) - f(x)|^p dh\, dx \\ &\leq \int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx\, dh.\end{aligned}$$

Ora l'affermazione segue dalla continuità in media. □

Il Teorema 6.3 può essere ora migliorato.

TEOREMA 6.5 (Densità). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per ogni $1 \leq p < \infty$, l'insieme delle funzioni C^∞ con supporto compatto in A è denso in $L^p(A)$:*

$$\overline{C_c^\infty(A)}^{L^p(A)} = L^p(A).$$

DIM. Per ogni $\delta > 0$, l'insieme

$$K_\delta = \{x \in A : \mathrm{dist}(x, \partial A) \geq \delta \text{ e } |x| \leq 1/\delta\}$$

è un sottoinsieme compatto di A ed inoltre, per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_A |f(x) - f(x)\chi_{K_\delta}(x)|^p dx = 0.$$

Senza perdere di generalità possiamo allora supporre che f abbia supporto compatto in A (ed estendere la funzione f su tutto $\mathbb{R}^n$ ponendola uguale a 0 fuori da A).

Per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo la regolarizzazione $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ha supporto compatto contenuto in A. Questo è vero perchè $\mathrm{dist}(K, \partial A) = \inf\{|x-y| : x \in K,\, y \in \partial A\} > 0$. Per il Teorema 6.4 parte ii) si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|f_\varepsilon - f\|_p = 0,$$

e l'affermazione segue. □

Presentiamo ora un'applicazione del Teorema di densità alla trasformata di Fourier. Data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si definisce la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i \langle \xi, x\rangle} f(x) dx,$$

dove $\langle x, \xi \rangle$ è il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. L'integrale converge perchè convergono la sua parte reale e la sua parte immaginaria. È elementare controllare che $\widehat{f}$ è una funzione continua (usare il Teorema della convergenza dominata).

TEOREMA 6.6 (Riemann-Lebesgue). *Per ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

DIM. Proviamo il teorema quando $n = 1$. Il caso $n \geq 2$ si riduce al caso $n = 1$ usando il Teorema di Fubini-Tonelli. Per il Teorema 6.5, dato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Con una integrazione per parti si trova

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathrm{e}^{2\pi i x \xi} dx = \frac{i}{2\pi\xi} \int_{\mathbb{R}} g'(x) \mathrm{e}^{2\pi i x \xi} dx,$$

e siccome $|g'(x)e^{2\pi i x\xi}| = |g'(x)| \in L^1(\mathbb{R})$, segue che

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{g}(\xi) = 0.$$

La tesi è ora una conseguenza della disuguaglianza

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \|f-g\|_1 + |\widehat{g}(\xi)|.$$

□

7. Cenni sulla separabilità

Consideriamo uno spazio di misura $(X, \mathscr{A}, \mu)$. La σ-algebra $\mathscr{A}$ si dice separabile se è generata da un insieme numerabile di insiemi, cioè se è la più piccola σ-algebra che contiene questo insieme numerabile. In questo caso, lo spazio $L^p(X)$ è separabile per ogni $1 \leq p < \infty$. Ad esempio, la σ-algebra degli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili di $\mathbb{R}^n$ è generata dai plurintervalli di estremi razionali e quindi è separabile.

Non ci interessa vedere le dimostrazioni di queste affermazioni, osserviamo solamente che L^∞ in generale non è separabile.

Proposizione 7.7. *In generale $L^\infty(X)$ non è separabile.*

Dim. Consideriamo $X = \mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue. Posto $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, definiamo per ogni $r > 0$ la famiglia di funzioni

$$\mathscr{B}_r = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f - \chi_{B_r}\|_\infty < \frac{1}{2}\}.$$

Osserviamo che ogni $\mathscr{B}_r$ è un aperto di $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e che $\mathscr{B}_{r_1} \cap \mathscr{B}_{r_2} = \emptyset$ ogni volta che $r_1 \neq r_2$. Si è in questo modo costruita una famiglia più che numerabile di aperti disgiunti.

Consideriamo ora un insieme di funzioni $\mathscr{F} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ che sia denso. Allora per ogni $r > 0$ esiste $f_r \in \mathscr{F}$ tale che $f \in \mathscr{B}_r$. La funzione $F : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{F}$ tale che $F(r) = f_r$ è iniettiva. Quindi $\mathscr{F}$ ha cardinalità più che numerabile. □

CHAPTER 4

Misure di Borel e di Radon

1. Misure di Borel

Sia (X, τ) uno spazio topologico. La σ-algebra di Borel è la più piccola σ-algebra contenente τ

$$\mathscr{B}(X) = \bigcap \big\{\mathscr{A} : \mathscr{A} \ \sigma\text{-algebra contenente } \tau\big\}.$$

Definizione 1.8 (Misura boreliana). Sia (X, τ) uno spazio topologico.

i) Una misura esterna $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ si dice di Borel se gli insiemi di Borel sono μ-misurabili. La restrizione $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0, \infty]$ si dirà misura di Borel.
ii) Una misura esterna $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ si dice di Borel regolare se per ogni insieme $E \subset X$ esiste $B \in \mathscr{B}(X)$ tale che $E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$.

In modo naturale si definiscono poi le funzioni Boreliane.

Definizione 1.9 (Funzione Boreliana). Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice di Borel se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathscr{B}(X)$.

2. La misura di Lebesgue è Boreliana regolare

Della misura (esterna) di Lebesgue $\mathscr{L}^n$ su $\mathbb{R}^n$ conosciamo già le seguenti proprietà:

i) $\mathscr{L}^n(E) = \mathscr{L}^n(x+E)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ (invarianza per traslazioni). Vedremo che questa proprietà caratterizza la misura di Lebegue.
ii) $\mathscr{L}^n(\lambda E) = \lambda^n \mathscr{L}^n(E)$ per ogni $\lambda > 0$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ (omogeneità rispetto alle dilatazioni).
iii) $\mathscr{L}^n$ è una misura di Borel. Infatti, i plurintervalli sono misurabili e gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ sono unioni numerabili di plurintervalli, e dunque sono anch'essi misurabili.
iv) Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme compatto allora $\mathscr{L}^n(K) < \infty$.
v) $\mathscr{L}^n(A) = \sup\limits_{R \subset A} \mathscr{L}^n(R)$ per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, con R unione finita di pluri-intervalli (=plurirettangolo).

In questa sezione studiamo ulteriori proprietà della misura di Lebesgue.

Teorema 2.10. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ contenente E ed un chiuso $C \subset E$ tali che $\mathscr{L}^n(A \setminus C) \le \varepsilon$.*

Dim. Supponiamo peliminarmente che $\mathscr{L}^n(E) < \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ di E tale che

$$\mathscr{L}^n(E) + \varepsilon \ge \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(I_k).$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un plurintervallo *aperto* J_k contenente I_k tale che $\mathscr{L}^n(J_k \setminus I_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$. L'insieme

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

è aperto in quanto unione di aperti, e inoltre

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(J_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(I_k) + \mathscr{L}^n(J_k \setminus I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathscr{L}^n(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) \\ &\leq \mathscr{L}^n(E) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Essendo E misurabile si ha $\mathscr{L}^n(A) = \mathscr{L}^n((A \setminus E) \cup E) = \mathscr{L}^n(A \setminus E) + \mathscr{L}^n(E)$. Dunque, per differenza si trova

$$\mathscr{L}^n(A \setminus E) \leq 2\varepsilon.$$

Togliamo l'ipotesi che E abbia misura finita. Detta $B_1 = B(0,1)$ la palla di raggio 1 centrata in 0 e posto $B_k = B(0,k) \setminus B(0,k-1)$, si ha

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Poichè ogni E_k ha misura finita, per la prima parte della dimostrazione per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un aperto A_k contenente E_k e tale che

$$\mathscr{L}^n(A_k \setminus E_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

L'insieme $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è aperto ed inoltre

$$\mathscr{L}^n(A \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k \setminus E_k) \leq \varepsilon.$$

Passiamo alla costruzione del chiuso. Poichè E è misurabile anche il complementare $E' = \mathbb{R}^n \setminus E$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile. Dunque, esiste un insieme aperto A_1 che contiene E' e tale che $\mathscr{L}^n(A_1 \setminus E') \leq \varepsilon$. L'insieme $C = A_1' = \mathbb{R}^n \setminus A_1$ è chiuso ed è contenuto in E. Inoltre si ha

$$\mathscr{L}^n(E \setminus C) = \mathscr{L}^n(E \cap C') = \mathscr{L}^n(A_1 \setminus E') \leq \varepsilon.$$

In conclusione, si ottiene la stima desiderata

$$\mathscr{L}^n(A \setminus C) = \mathscr{L}^n\big((A \setminus E) \cup (E \setminus C)\big) \leq \mathscr{L}^n(A \setminus E) + \mathscr{L}^n(E \setminus C) \leq 2\varepsilon.$$

□

OSSERVAZIONE 2.11. Se togliamo l'ipotesi che E sia misurabile, possiamo comunque dire che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un aperto A_k contenente E e tale che $\mathscr{L}^n(A_k) \leq \mathscr{L}^n(E) + 1/k$. L'insieme

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

è un Boreliano che contiene E ed inoltre $\mathscr{L}^n(B) = \mathscr{L}^n(E)$. Dunque, $\mathscr{L}^n$ è una misura di Borel regolare.

Definizione 2.12 (Insiemi G_δ). Un insieme $G \subset \mathbb{R}^n$ si dice G_δ, e scriveremo $G \in G_\delta(\mathbb{R}^n)$, se esiste una successione di insiemi aperti $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Il Teorema 2.10 ha la seguente conseguenza.

Corollario 2.13. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile se e solo se esistono $G \in G_\delta(\mathbb{R}^n)$ e un insieme N di misura di Lebesgue nulla tali che $E = G \setminus N$.*

Dim. Se E è misurabile, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme aperto A_k contenente A tale che $\mathscr{L}^n(A_k \setminus E) \le \frac{1}{k}$. L'insieme $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ è G_δ ed inoltre, posto $N = G \setminus E$ si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{L}^n(N) \le (A_k \setminus E) \le \frac{1}{k},$$

e dunque $\mathscr{L}^n(N) = 0$.

Viceversa, se $E = G \setminus N$ come nelle ipotesi, allora E è misurabile in quanto differenza di insiemi misurabili. □

2.1. Insieme non misurabile di Vitali.

Esempio 2.1 (Insieme di Vitali). Assumendo la validità dell'Assioma di scelta è possibile "costruire" (dimostrare che esistono) insiemi in $\mathbb{R}$ che non sono $\mathscr{L}^1$-misurabili.

Consideriamo l'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e introduciamo la relazione di equivalenza $\sim$ su $[0,1]$ dicendo che $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. L'intervallo $[0,1]$ viene suddiviso nell'unione disgiunta delle classi di equivalenza della relazione $\sim$, che indicheremo con $[x] = \{y \in [0,1] : y \sim x\}$.

Utilizziamo l'assioma di scelta per selezionare da ogni classe di equivalenza $[x]$ un elemento $y \in [x]$. Definiamo l'insieme $V \subset [0,1]$ come l'unione di questi rappresentanti.

Per ogni numero razionale $q \in Q = [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $\tau_q(x) = q + x$. Osserviamo che $q \neq q'$ implica che $\tau_q(V) \cap \tau_{q'}(V) = \emptyset$, in quanto V contiene elementi che stanno in classi di equivalenza distinte. Inoltre, essendo ogni $x \in [0,1]$ in una delle classi di equivalenza, si ha

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in Q} \tau_q(V) \subset [-1,2].$$

Dalle inclusioni precedenti segue che

$$1 \le \mathscr{L}^1\Big(\bigcup_{q\in Q} \tau_q(V)\Big) \le 3. \tag{2.16}$$

Per l'invarianza di $\mathscr{L}^1$ rispetto alle traslazioni si ha $\mathscr{L}^1(V) = \mathscr{L}^1(\tau_q(V))$ per ogni $q \in Q$. Supponiamo ora per assurdo che V sia $\mathscr{L}^1$- misurabile. Se fosse $\mathscr{L}^1(V) = 0$, si avrebbe

$$\mathscr{L}^1\Big(\bigcup_{q\in Q} \tau_q(V)\Big) = \sum_{q\in Q} \mathscr{L}^1(\tau_q(V)) = \sum_{q\in Q} \mathscr{L}^1(V) = 0.$$

Se invece fosse $\mathscr{L}^1(V) > 0$, allora

$$\mathscr{L}^1\Big(\bigcup_{q\in Q}\tau_q(V)\Big) = \infty.$$

In entrambi i casi si contraddice la (2.16).

3. Le funzioni continue a supporto compatto sono dense in L^p

Dimostrazione del Teorema 6.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $1 \le p < \infty$. Vogliamo provare che per ogni $f \in L^p(A)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c(A)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Possiamo supporre che f abbia supporto compatto in A e che sia $f \ge 0$. Per il Teorema 1.8, esistono insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili $A_k \subset A$, $k \in \mathbb{N}$, tali che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x), \quad x \in A.$$

Per il Teorema della convergenza dominata, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_A \Big| f(x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x)\Big|^p dx < \varepsilon.$$

Dunque, le funzioni semplici sono dense in $L^p(A)$. Gli insiemi A_k sono sottoinsiemi del supporto di f e quindi sono a chiusura compatta in A.

È sufficiente allora dimostrare che per ogni insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile $E \subset A$ con chiusura compatta in A e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C_c(A)$ tale che

$$\int_A \big|\chi_E(x) - g(x)\big|^p dx < \varepsilon.$$

Per il Teorema 2.10 esistono un aperto $\Omega \subset A$ ed un chiuso C tali che $C \subset E \subset \Omega$ ed inoltre $\mathscr{L}^n(\Omega \setminus C) < \varepsilon$. Siccome E ha chiusura compatta in A, possiamo supporre che anche Ω abbia chiusura compatta in A (e che C sia compatto).

Definiamo le seguente funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)}{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) + \mathrm{dist}(x, C)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che il denominatore non è mai 0, grazie alle inclusioni $C \subset E \subset \Omega$ con C compatto. Dunque g è ben definita ed è una funzione continua, essendo quoziente di funzioni continue. Inoltre si ha: 1) $g(x) = 1$ per ogni $x \in C$; 2) $g(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$; 3) $0 \le g(x) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. In particolare, si ha $g \in C_c(A)$. Infine, si stima

$$\int_A \big|\chi_E(x) - g(x)\big|^p dx = \int_{\Omega\setminus C} \big|\chi_E(x) - g(x)\big|^p dx \le \mathscr{L}^n(\Omega \setminus C) \le \varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione.

□

4. Le misure metriche sono boreliane

In questa sezione consideriamo uno spazio metrico (X, d).

DEFINIZIONE 4.2 (Misura metrica). Diciamo che una misura esterna $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ è una misura metrica se per ogni coppia di insiemi $A, B \subset X$ si ha

$$\operatorname{dist}(A, B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

In altri termini, una misura esterna è metrica se è addittiva sulle unioni di insiemi "staccati". Vogliamo provare il seguente teorema.

TEOREMA 4.3. *Siano (X, d) uno spazio metrico e μ una misura metrica su X. Allora μ è una misura di Borel.*

Per farlo partiamo dal seguente lemma.

LEMMA 4.4. *Sia μ una misura metrica su X. Sia $E_k \subset E_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione crescente di insiemi di X e sia $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Se $\operatorname{dist}(E \setminus E_{k+1}, E_k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \mu(E).$$

DIM. Per monotonia, il seguente limite esiste

$$L = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k),$$

e dal momento che $E_k \subset E$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $L \le \mu(E)$. È dunque sufficiente mostrare che $L \ge \mu(E)$ e non è restrittivo supporre $L < \infty$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mu(E) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \le \mu(E_k) + \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j),$$

e dunque il risultato segue se si mostra che converge la seguente serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) < \infty.$$

Sia $F_j = E_{j+1} \setminus E_j$ e osserviamo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{j=1}^{2m} \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(F_{2j}) + \sum_{j=1}^{m} \mu(F_{2j-1}).$$

Ora osserviamo che

$$\operatorname{dist}(F_{2j}, F_{2j-2}) = \operatorname{dist}(E_{2j+1} \setminus E_{2j}, E_{2j-1} \setminus E_{2j-2}) \ge d(E \setminus E_{2j}, E_{2j-1}) > 0,$$

e analogamente per gli insiemi con indice dispari. Possiamo dunque passare dalla somma delle misure alla misura dell'unione:

$$\sum_{j=1}^{2m} \mu(F_j) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} F_{2j}\Big) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} F_{2j-1}\Big) \le \mu(E_{2m+1}) + \mu(E_{2m}) \le 2L$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$. Questo prova che la serie converge e il lemma è dimostrato. $\square$

Dimostrazione del Teorema 4.3. Dobbiamo dimostrare che ogni insieme $A \subset X$ aperto è μ-misurabile, e cioè che per ogni $E \subset X$ si ha

$$\mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A'). \tag{4.17}$$

L'altra disuguaglianza è sempre vera.

Per $k \in \mathbb{N}$ consideriamo gli insiemi

$$A_k = \big\{x \in A : \mathrm{dist}(x, A') > \frac{1}{k}\big\}.$$

Possiamo supporre che $A' \neq \emptyset$, altrimenti $A = X$ e non ci sarebbe nulla da provare. Poichè si ha $\mathrm{dist}(E \cap A_k, E \cap A') > 0$, la misura esterna μ è addittiva per tale coppia di insiemi

$$\mu(E \cap A_k) + \mu(E \cap A') = \mu((E \cap A_k) \cup (E \cap A')) \leq \mu(E).$$

Se proviamo che

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E \cap A_k) = \mu(E \cap A) \tag{4.18}$$

la tesi (4.17) segue.

Consideriamo la successione di insiemi $E_k = E \cap A_k$, $k \in \mathbb{N}$. Si tratta di una successione crescente ed inoltre

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E \cap A.$$

Vogliamo dedurre la validità di (4.18) dal Lemma 4.4. Osserviamo che, essendo $E \cap A \setminus E_{k+1} \subset A \setminus A_{k+1}$ e $E_k \subset A_k$, si ha

$$\mathrm{dist}((E \cap A) \setminus E_{k+1}, E_k) \geq \mathrm{dist}(A \setminus A_{k+1}, A_k) \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque, le ipotesi del lemma sono verificate e la (4.18) segue. □

Usiamo il Teorema 4.3 per provare che le misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$ sono di Borel.

Teorema 4.5. *Per ogni $s \geq 0$, la misura di Hausdorff s-dimensionale $\mathscr{H}^s$ su $\mathbb{R}^n$ è di Borel.*

Dim. Proviamo che $\mathscr{H}^s$ è una misura metrica su $\mathbb{R}^n$. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi staccati, $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, e proviamo che

$$\mathscr{H}^s(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B).$$

L'altra disuguaglianza è sempre verificata. È sufficiente provare che $\mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B)$ per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo. Non è restrittivo supporre che sia $\mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) < \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia di insiemi $E_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, tali che

$$\mathrm{diam}(E_k) < \delta, \quad A \cup B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k, \quad \omega_s \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s < \mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon.$$

Se $0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$, ogni insieme E_k non può intersecare contemporaneamente sia A che B. Dunque gli insiemi $\mathbb{N}_A = \{k \in \mathbb{N} : E_k \cap A \neq \emptyset\}$ ed $\mathbb{N}_B = \{k \in \mathbb{N} : E_k \cap B \neq \emptyset\}$ sono disgiunti e pertanto

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B) &\leq \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}_A} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s + \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}_B} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s \leq \mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ora, per $\delta \to 0^+$ si trova $\mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B) \leq \mathscr{H}^s(A \cup B) + \varepsilon$, e data l'arbitrarietà di ε si ottiene la tesi. $\square$