Esercizio Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e definiamo

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{B_1(x)} f(y)\, dy$$

dove $B_1(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < 1 \}$.

Provare che:

(1) F è continua su $\mathbb{R}^n$

(2) $\lim_{|x| \to \infty} F(x) = 0$.

Soluzione. La frontiera $\partial B_1(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y-x| = 1 \}$ ha misura nulla. Infatti

$$\partial B_1(x) = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{k}}(x) \setminus B_1$$

e inoltre

$$\mathcal{L}^n\left(B_{1+\frac{1}{k}}(x)\right) = \mathcal{L}^n\left(B_{1+\frac{1}{k}}(0)\right) =$$

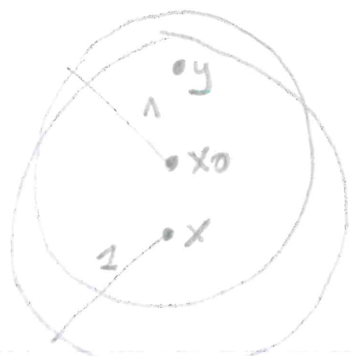
$$= \left(1+\frac{1}{k}\right)^n \underbrace{\mathcal{L}^n\left(B_1(0)\right)}_{= \omega_n}$$

E quindi

$$\mathcal{L}^n\left(B_{1+\frac{1}{k}}(x) \setminus B_1(x)\right) = \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^n - 1\right] \omega_n \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Poi osservo che, fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to x_0} \chi_{B_1(x)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y-x_0|<1 \\ 0 & \text{se } |y-x_0|>1 \end{cases}$$



Infatti se $|y-x_0|<1$:

$$|y-x| \leq |y-x_0| + |x_0-x| \underset{\uparrow}{<} 1$$

NON APPENA

$$|x_0-x| < \underbrace{1-|y-x_0|}_{>0}$$

Dunque

$$\lim_{x \to x_0} \chi_{B_1(x)}(y) = \chi_{B_1(x_0)}(y)$$

per $\mathcal{L}^n$-q.o. $y \in \mathbb{R}^n$.

Per convergenza dominata

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\chi_{B_1(x)}(y)\, f(y)}_{\text{maggiorata da}}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x \to x_0} \chi_{B_1(x)}(y)\, f(y)\, dy \qquad \chi_{B_2(x_0)}(y)|f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$= \int_{B_1(x_0)} f(y)\, dy = F(x_0).$$

(2) Dato $R>0$, se $|x|>R+1$ allora

$$B_1(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y|>R\}.$$

Per Hölder

$$|F(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_1(x)}(y)\, |f(y)|\, dy$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_1(x)}(y)\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_1}(y)\, |f(y)|^2 dy\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{\omega_n} \left(\int_{\{|y|>R\}} |f(y)|^2 dy\right)^{1/2}$$

Per convergenza dominata

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\{|y|>R\}} |f(y)|^2 \, dy = 0$$

Conclusione: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0$ tale che

$$|x| > R \implies |F(x)| < \varepsilon$$

Esercizio Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $|a_n| \leq \log n$ per $n \geq 2$

Provare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{1}{n^x}, \quad x \geq 2,$$

converge in $L^1(0,\infty)$

Soluzione. Certamente $n^{-x} \in L^1(2,\infty)$. Inoltre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^x} < +\infty$ $\forall x \geq 2$

Bisogna provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^\infty \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k^x} \right| dx = 0,$$

Chiaramente

$$\int_2^\infty \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k^x} \right| dx \leq \int_2^\infty \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|a_k|}{k^x} \, dx \leq$$

$$\leq \int_2^\infty \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k^x}}_{= g(x) \geq 0} dx$$

Se $g \in L^1(0,\infty)$ si può usare il Teorema della convergenza dominata e concludere.

Per convergenza monotona

$$\int_2^\infty g(x)\, dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_2^\infty \frac{\log k}{k^x} \, dx =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left[- k^{-x} \right]_{x=2}^{x=\infty} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

□

<u>Esercizio</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\, |x-y|^\alpha \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

dove $L \geq 0$ ed $\alpha \in (0,1]$ sono due costanti.
Detto $G = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in \mathbb{R} \}$, è vero che $\mathcal{L}^2(G) = 0$?

Soluzione. Per chiarezza supponiamo che $f: [0,1] \to \mathbb{R}$
Suddividiamo

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}_{= I_n^i}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

se $x \in I_n^i$

$$\left| f(x) - f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right| \leq L \frac{1}{n^\alpha}$$

Sia R_n^i il rettangolo in figura. Allora

$$\mathcal{L}^2(R_n^i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2L}{n^\alpha} = \frac{2L}{n^{1+\alpha}}$$

Inoltre

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_n^i \implies \mathcal{L}^2(G) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^2(R_n^i) =$$

$$= n \cdot \frac{2L}{n^{1+\alpha}} = \frac{2L}{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha > 0$$

Dunque $\mathcal{L}^2(G) = 0$.