Esercizio Sia $0<\varepsilon<1$. Costruire una funzione $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tale che:

(1) $|f(x)-f(y)|\leq |x-y| \quad \forall x,y\in[0,1]$ (1-Lip.)

(2) f cresce strettamente

(3) $\mathcal{L}^1(\{x\in[0,1] : f'(x) \text{ esiste e } f'(x)=0\})\geq 1-\varepsilon$.

SOL. Sia $\{q_n\in\mathbb{Q}\cap[0,1] : n\in\mathbb{N}\}$ una enumerazione di $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Definiamo

$$K=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\, q_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)\subset\mathbb{R},$$

Allora

$$\mathcal{L}^1(K)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon,$$

e dunque l'insieme $E=[0,1]\setminus K$ verifica

$$\mathcal{L}^1(E)\geq 1-\mathcal{L}^1(K)\geq 1-\varepsilon$$

Definiamo $f:[0,1]\to[0,\infty)$

$$f(x)=\int_0^x \chi_K(t)\,dt,\qquad x\in[0,1].$$

Siccome $\chi_E\in L^1(0,1)$, è certamente $f\in AC([0,1])$.
Di più:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_{[x,y]}\chi_K(t)\,dt\right|\leq\mathcal{L}^1([x,y])=|x-y|.$$

Per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in E = [0,1] \setminus K$ esiste la derivata e si ha

$$f'(x) = \chi_K(x) = 0 .$$

Questo prova il punto (3).

Verifichiamo il punto (2). Siano $0 \leq x < y \leq 1$ e sia $q_n \in \mathbb{Q}$ tale che (esiste certamente)

$$x < q_n < y .$$

Dunque

$$f(y) - f(x) = \int_x^y \chi_K(s)\, ds \geq$$

$$\geq \int_x^y \chi_{\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)}(s)\, ds \geq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, |x-y|\right\} > 0$$

e quindi $f(y) > f(x)$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $E \subset [0,1]$ un insieme di misura nulla.

Costruire una funzione $f \in AC([0,1])$ crescente tale che

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = +\infty$$

per ogni $x \in E$.

Soluzione. Siano A_n, $n \in \mathbb{N}$, aperti tali che:

(1) $E \subset A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$

(2) $\mathcal{L}^1(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$

Esistono perché $\mathcal{L}^1(E) = 0$.

Definiamo

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(t)\, dt \quad , \quad x \in [0,1]$$

$$\overset{CM}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \chi_{A_n}(t)\, dt$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 1$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \in L^1(0,1)$ e dunque $f \in AC([0,1])$.

Sia ora $x \in E$. Dato $n \in \mathbb{N}$ sia $\delta(n) > 0$ tale che

$$\big(x-\delta(n),\, x+\delta(n)\big) \subset A_n$$

(è aperto e $x \in A_n$).

Dunque per $0 < |\delta| < \delta(n)$ avremo $x+\delta \in A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_1$

Più precisamente:

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(t)}_{\substack{\geq \\ n \quad \text{se} \quad \forall t}}\, dt \geq \qquad |\delta|<\delta_0$$

$$\geq n \qquad \text{se} \qquad |\delta|<\delta_0 .$$

Questa è la tesi.

□

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f \in AC([0,1])$. Provare che

$$V(f) = \int_0^1 |f'(x)|\, dx .$$

Soluzione. Sappiamo che

$$\int_0^1 |f'(x)|\, dx \leq V(f)$$

(Vale $\forall f \in BV([0,1])$). Proviamo la disuguaglianza opposta. Sia $\sigma = \{0 = x_1 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ una suddivisione di $[0,1]$. Allora:

$$\sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \overset{\text{TFCI}}{=} \sum_{x_i \in \sigma} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{x_i \in \sigma} \int_{[x_{i-1}, x_i]} |f'(x)|\, dx = \int_{[0,1]} |f'(x)|\, dx$$

Passando al sup su $\sigma \in S([0,1])$ trovo la tesi.

□