Esercizio Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione con supporto compatto tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \, dx = 0$$

Provare che $f = 0$ q.o.

Soluzione. Se fosse $f \in C^1_c(\mathbb{R})$ ragionerei così:

Per il Teorema di Lagrange:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = |f'(\xi(h))| \leq \max_{\mathbb{R}} |f'| < \infty$$

Siccome l'integrazione avviene su un compatto si può portare la "derivata" nell'integrale

$$0 = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f'(x)| \, dx$$

Si deduce che $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e dunque $f =$ costante. Siccome f ha supporto compatto deve essere $f = 0$.

Per ricondursi a questo caso ($f \in C^1_c(\mathbb{R})$), regolarizziamo

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y) f(y) \, dy, \quad \varepsilon > 0,$$

dove $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è un nucleo di regolarizzazione.

Allora:

(1) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$

(2) f_ε ha supporto compatto, perché f lo ha.

Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)|\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x+h-y)\, f(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\,dy \right| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, f(y+h)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\,dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, |f(y+h) - f(y)|\, dy\, dx$$

Fubini-Tonelli

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y+h) - f(y)|\, dy$$

Per confronto segue che

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)}{h} \right| dx = 0$$

Deduciamo che $f_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall \varepsilon > 0$.

Siccome poi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon - f\|_1 = 0$$

deduciamo che $\|f\|_1 = 0$ e quindi $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio Sia $f \in L^1(0,1)$ e definiamo $F:(0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(y)\, e^{-\frac{y}{x}}\, dy \quad , \quad x>0$$

(1) Provare che F è continua su $(0,\infty)$

(2) Dare condizioni su f sufficienti affinché F si estenda in modo continuo fino a $x=0$

Soluzione.

(1) Fissiamo $x_0 > 0$. Per la caratterizzazione sequenziale della continuità

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \iff \lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x_0)$$

per ogni successione $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

Sia $\delta > 0$ tale che $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (0,\infty)$. Definitivamente si ha

$$x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

e dunque

$$\left| \frac{1}{x_n} e^{-\frac{y}{x_n}} \right| \leq \frac{1}{x_0 - \delta} \quad \text{definitivamente}$$

e quindi

$$\left| f(y) \frac{1}{x_n} e^{-\frac{y}{x_n}} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{x_0 - \delta} |f(y)|}_{\text{maggiorante}} \in L^1(0,1)$$

Per convergenza dominata posso portare il limite dentro l'integrale

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} f(y)\, e^{-\frac{y}{x_n}}\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x_0} f(y)\, e^{-\frac{y}{x_0}}\, dy$$

$$= F(x_0)$$

(2) Fissiamo $0<\delta<1$. Allora

$$\sup_{\delta\le y\le 1} \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x} = \frac{e^{-\frac{\delta}{x}}}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

convergenza uniforme per $x\to 0^+$ su $[\delta,1]$

Dunque per CU (o anche CD)

$$\lim_{x\to 0^+} \int_\delta^{\pi/2} f(y)\, \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x}\, dy = 0 \qquad \forall\, \delta>0.$$

Dobbiamo capire il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^\delta f(y)\, \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x}\, dy$$

con $\delta>0$ piccolo quanto vogliamo.

Quindi supponiamo che esista finito:

$$L = \lim_{y \to 0^+} f(y) \in \mathbb{R},$$

Esaminiamo

$$\int_0^\delta \frac{1}{x} e^{-y/x} \, dy = \left[- e^{-y/x} \right]_{y=0}^{y=\delta} =$$

$$= 1 - e^{-\delta/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

Congettura (Ansatz)

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = L$$

Fisso $\varepsilon > 0$,

$$F(x) - L = \int_0^\delta f(y) e^{-y/x} dy + \int_\delta^1 f(y) e^{-y/x} dy - L$$

$$= \int_0^\delta (f(y) - L) e^{-y/x} dy + L \int_0^\delta e^{-y/x} dy - L$$

$$+ \int_\delta^1 f(y) e^{-y/x} dy$$

Per $\delta > 0$ piccolo: $|f(y) - L| < \varepsilon \quad \forall \, 0 < y < \delta$:

$$|F(x) - L| \le \int_0^\delta |f(y) - L| \, e^{-y/x} dy + |L| \left| \int_0^\delta e^{-y/x} dy - 1 \right|$$

$$+ \int_\delta^1 |f(y)| \, e^{-y/x} dy$$

$$\leq \varepsilon \left(1 - e^{-\delta/x}\right) + |L| \, e^{-\delta/x} + \int_{\delta}^{1} |F(y)| \, e^{-y/x} \, dy$$

Dunque

$$\limsup_{x \to 0^+} |F(x) - L| \leq \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Questo prova che $\lim_{x \to 0^+} |F(x) - L| = 0$.

$\square$