Esercizio Sia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(\sin t)^{1-x}}\,dt$$

(1) Provare che f è derivabile su $(0,\infty)$

(2) Calcolare il limite, se esiste,

$$\lim_{x\to0^+} f(x)$$

Soluzione

(1) Osserviamo che $\forall\ 0<\varepsilon<1\ \exists\ \delta>0$ tale che

$$(1-\varepsilon)t \le \sin t \le t \qquad \forall\, t\in(0,\delta)$$

Quindi $$\int_0^{\delta}\frac{1}{(\sin t)^{1-x}}\,dt \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1-x}}\int_0^{\delta}\frac{1}{t^{1-x}}\,dt<\infty \quad \forall x>0$$

Dunque f è ben definita.

Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x(\sin t)^{x-1}\right) = (\sin t)^{x-1} + $$
$$+\,x(\sin t)^{x-1}\cdot\log(\sin t)$$

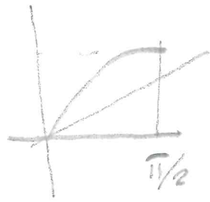
Fissiamo $\delta > 0$ e supponiamo $\delta \le x \le M < \infty$

Allora

$$(\sin t)^{x-1} \le (\sin t)^{\delta - 1} \in L^1(0, \pi/2)$$

$$|x (\sin t)^{x-1} \log (\sin t)| \le M (\sin t)^{\delta-1} |\log \sin t|$$

posso supporre $\sin t \ge \frac{t}{2}$



$$\le C \, t^{\delta - 1} \left|\log\left(\frac{t}{2}\right)\right| \in L^1(0, \pi/2)$$

Questo perché $\delta > 0$ e $\lim_{t \to 0^+} t^{\delta/2} \left|\log\left(\frac{t}{2}\right)\right| = 0$

Quindi posso portare la derivata sotto il segno di integrale:

$$\frac{d f(x)}{dx} = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x (\sin t)^{x-1} \right) dt$$

$$= \ \ldots$$

In particolare: f è derivabile su $(0, \infty)$.

(2) Esercizio per il lettore $\square$

Esercizio Si consideri $f: (0,\infty)\times(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{-yx^2}\sin(y)$$

Provare che:

i) $$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\right)dx$$ (Esistono e sono uguali)

ii) $f \notin L^1((0,\infty)\times(0,\infty))$

Soluzione. Dati $m, n \in \mathbb{N}$, f è integrabile su

$$(0,m)\times(0,n)$$

perché è continua e limitata.

Per Fubini

$$\int_{(0,m)\times(0,n)} f(x,y)\,dxdy = \int_0^m\left(\int_0^n f(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^n\left(\int_0^m f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Voglio passare al limite per $m\to\infty$ ed $n\to\infty$ nell'identità

$$A = \int_0^m\left(\int_0^n e^{-yx^2}\sin(y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^n\left(\int_0^m e^{-yx^2}\sin(y)\,dx\right)dy = B$$

Conti:

$$B = \int_0^n \sin(y)\left(\int_0^{\sqrt{y}m} e^{-z^2}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dz\right)dy = \int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\left(\int_0^{\sqrt{y}m} e^{-z^2}dz\right)dy$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}}z$$

Per argomenti elementari, esiste

$$\lim_{m\to\infty} B = \int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\left(\lim_{m\to\infty}\int_0^{\sqrt{y}\,m} e^{-z^2}\,dz\right)dy$$

$$= \int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,dy \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz}_{=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

E comunque converge

E per il criterio di convergenza di Abel-Dirichlet per integrali oscillanti:

esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} B = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,dy \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,dy$$ integrale improprio di Riemann

Studiamo A, Partiamo da qui:

$$\int_0^n e^{-yx^2}\sin(y)\,dy = \left[\frac{e^{-yx^2}}{-x^2}\sin y\right]_{y=0}^{y=n} - \int_0^n \frac{e^{-yx^2}}{-x^2}\cos y\,dy$$

$$= \frac{e^{-nx^2}\sin(n)}{-x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^n e^{-yx^2}\cos(y)\,dy$$

$$= -\frac{e^{-nx^2}\sin(n)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\left(\left[\frac{e^{-yx^2}}{-x^2}\cos(y)\right]_{y=0}^{y=n} - \int_0^n \frac{e^{-yx^2}}{-x^2}(-\sin y)\,dy\right)$$

$$= -\frac{e^{-nx^2}\sin n}{x^2} - \frac{1}{x^4}\left(e^{-nx^2}\cos n - 1\right) - \frac{1}{x^4}\int_0^n e^{-yx^2}\sin y\, dy$$

e quindi

$$\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\int_0^n e^{-yx^2}\sin(y)\, dy = -\frac{e^{-nx^2}\sin(n)}{x^2} - \frac{e^{-nx^2}\cos(n)-1}{x^4}$$

In definitiva:

$$A = \int_0^m \frac{1}{1+x^4}\left(1 - x^2 e^{-nx^2}\sin(n) - e^{-nx^2}\cos(n)\right) dx$$

Il limite per $m \to \infty$ (fatto prima) si può fare per convergenza dominata. Il limite per $n \to \infty$ si può pure fare e si trova

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} A = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx$$

Questo prova i). Inoltre abbiamo scoperto che

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy$$

↑

si calcola!

ii) Dai conti precedenti:

$$\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} |f(x,y)|\, dx\,dy = \int_0^\infty \frac{|\sin(y)|}{\sqrt{y}}\, dy \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = +\infty$$

È noto che diverge!