Esercizio. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile tale che

(1) $$\int_I f \, dx = 0$$

per ogni intervallo I con lunghezza 1 o $\sqrt{2}$.
Provare che $f = 0$ q.o.

Sol. Se per ogni $\delta > 0$ trovo $0 < \varepsilon < \delta$ tale che

(2) $$\int_{[0,\varepsilon]} f \, dx = 0$$

ho terminato per un argomento standard. Infatti da (2) deduco che $\int_I f \, dx = 0$ per ogni intervallo I e dunque per ogni misurabile I.

Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ so che

(3) $$\overline{\{ e^{2\pi n i x} \in \mathbb{C} \, ; \, n \in \mathbb{N} \}} = \{ z \in \mathbb{C} \, ; \, |z| = 1 \}$$

Scelgo $x = \sqrt{2}$, fisso $\delta > 0$ e dico che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

(4) $$| e^{2\pi n i \sqrt{2}} - 1 | < \delta$$

Se $\varepsilon > 0$ è fissato e $\delta > 0$ è piccolo posso dire che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

(5) $$| 2\pi n \sqrt{2} - 2\pi m | < \varepsilon$$

ovvero

(6) $$m - \frac{\varepsilon}{2\pi} < n\sqrt{2} < m + \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

ovvero

(7) $$\frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{2\pi n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{2\pi n}$$

In effetti mi serve (a (5))

$$(8) \qquad |n\sqrt{2} - m| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} .$$

Dunque per addizione e ~~sop~~ sottrazione riesco a costruire un intervallo I con misura $\leq \varepsilon/2\pi$, venendo in intervalli di lunghezza $\sqrt{2}$ e togliendo un intervalli di lunghezza 1, su questo intervallo

$$(9) \qquad \int_I f \, dx = 0$$

Per approssimazione (a (9)) vale per intervalli di lunghezza qualsiasi.

Esercizio Costruire un esempio di funzione $f \in C^1([0,1])$ con insieme di valori critici più che numerabile.

Soluzione. Sia $K \subset [0,1]$ l'insieme di Cantor e sia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

(1) $$g(x) = \operatorname{dist}(x, K).$$

Siccome K è chiuso:

(2) $$g(x) = 0 \iff x \in K, \quad e \quad g(x) > 0 \text{ per } x \in [0,1] \setminus K.$$

La funzione g è continua (1-Lipschitz).

Si definisce

(3) $$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt,$$

cosicché

(4) $$f'(x) = 0 \iff x \in K.$$

Provo che f è monotona crescente strettamente.
Supponiamo che $x_1 < x_2$. Siccome $|K| = 0$, oppure per costruzione, esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $\xi \notin K$, ovvero $g(\xi) > 0$. Ma allora $g > 0$ in un intorno di ξ e quindi

(5) $$\int_{x_1}^{x_2} g(\xi)\, d\xi > 0$$

ne segue che

(6) $$f(x_2) > f(x_1).$$

Siccome f è una biezione sull'immagine

(7) $$\operatorname{Card}(f(K)) = \operatorname{Card}(K) > \aleph_0.$$

Esercizio Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tali che $|a_n| \leq \log(n)$ $\forall n \geq 2$. Per $x \geq 2$ considerare la serie

(1)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n^{-x} .$$

(a) Provare che la serie converge in $L^1([2,+\infty))$

(b) Provare che

(1) bis
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_2^{+\infty} a_n n^{-x} \, dx = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n^{-x} \, dx .$$

Devo mostrare che

(2)
$$\lim_{n \to +\infty} \int_2^{+\infty} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k k^{-x} \right| dx = 0$$

Esamino la serie

(3)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^x} =: \varphi(x)$$

Voglio vedere se $\varphi \in L^1(2,+\infty)$.

(4)
$$\int_2^{+\infty} |\varphi(x)| \, dx = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^x} \, dx = [BL]$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \int_2^{+\infty} \log(n) \, n^{-x} \, dx$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[-n^{-x} \right]_2^{+\infty} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty .$$

Dunque in (2) posso usare la convergenza dominata.

(5)
$$\lim_{n \to +\infty} \int_2^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=2}^{n} a_k k^{-x}}_{|\,\cdot\,| \leq \varphi \in L^1} \, dx = \int_2^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} a_k k^{-x} \, dx$$

Esercizio

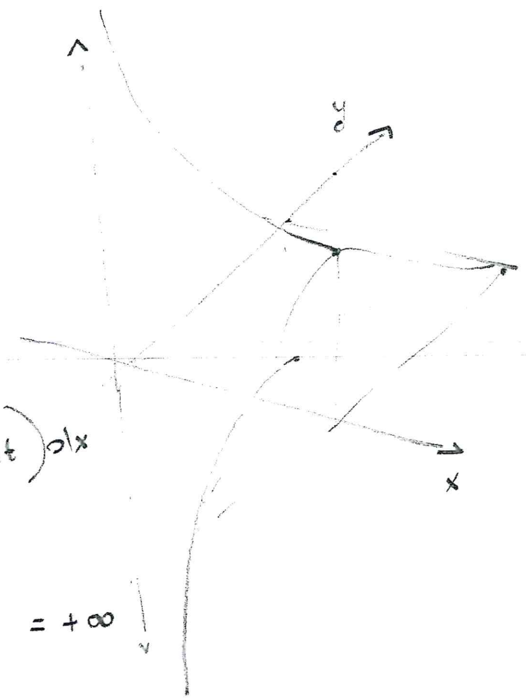
(a) Dire se la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è integrabile su $Q = [0,1]\times[0,1]$

(b) Calcolare gli integrali ripetuti nei due ordini

(c) Dire se esiste $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x,y)|\, dx \right) dy$ (finito).



(a) Integro su $Q \cap \{x>y\} = Q_1$

$$\int_{Q_1} f \, dxdy \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx$$

$$\overset{y=xt}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{x^4} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} x \, dt \right) dx$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{1}{x} dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt \right) = +\infty \,!$$

Dunque f non è integrabile su Q_1 e dunque nemmeno su Q dal momento che per simmetria

$$\int_Q |f| \, dxdy = 2 \int_{Q_1} f \, dxdy .$$

(b) Calcolo

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \overset{y=xt}{=} \frac{1}{x} \int_0^{1/x} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

Provo con $t = tg(s)$ ~~dt~~ $s = \operatorname{arctg}(t)$ $\quad ds = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{1-tg^2(s)}{1+tg^2(s)}\,ds = \int \frac{\cos^2(s)-\sin^2(s)}{1}\,ds$$

$$= \int \cos(2s)\,ds = \frac{\sin(2s)}{2} = \sin(s)\cos(s)$$

$$= tg(s)\cos^2(s)$$

Sviluppo $t\cos(s) = \sin(s)$, $t^2\cos^2(s) = (1-\cos^2(s))$

$$\cos^2(s) = \frac{1}{1+t^2}$$

Dunque

$$\int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{(1+t^2)}$$

Quindi

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

E analogamente

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$