Esercizio Sia (X,μ) uno spazio di misura e sia $f \in L^1(X)$.

Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n \log\left(1+\left(\frac{|f|}{n}\right)^2\right) d\mu .$$

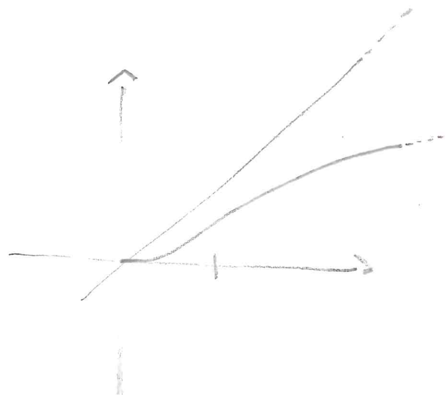
Esamino

$$\left(1+\frac{|f|^2}{n^2}\right)^n = \Big[\underbrace{\left(1+\frac{|f|^2}{n^2}\right)^{n^2}}_{\downarrow\; e^{|f|^2}}\Big]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \qquad (q.o.)$$

Dunque se posso passare con il limite nell'integrale posso dire che il risultato è $=0$.

Studio $\varphi(x) = \log(1+x^2)$. Guardo se

(*) $\qquad \log(1+x^2) \le x \quad$ per $\quad x \geq 0$.



Definisco $\Phi(x) = x - \log(1+x^2)$. Ho

$$\Phi(0) = 0 .$$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Dunque il minimo di Φ su $[0,+\infty)$ è in $x=0$.

Questo prova la (*). Dunque

$$\left| n \log\left(1+\frac{|f|^2}{n^2}\right)\right| \le n\,\frac{|f|}{n} = |f| \in L^1(X) .$$

Posso usare la convergenza dominata.

Soluzione. Si calcola

$$\int_0^\pi \sin(t) \int_1^{+\infty} \cos(tx)\, d\mu\, dt = \int_1^{+\infty} \int_0^\pi \sin(t)\cos(tx)\, dt\, d\mu$$

Mi ricordo che

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

e quindi

$$\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

Dunque

$$= \int_1^{+\infty} \int_0^\pi \left[\sin(t(1+x)) + \sin(t(1-x))\right] dt\, d\mu$$

$$= \int_1^{+\infty} \left[-\frac{\cos t(1+x)}{1+x} - \frac{\cos t(1-x)}{1-x}\right]_0^\pi d\mu$$

$$= \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{\cos \pi(1+x)}{1+x} - \frac{\cos \pi(1-x)}{1-x}\right] d\mu$$

$$= \int_1^{+\infty} \left[\frac{2}{1-x^2} + \frac{\cos \pi x}{1+x} + \frac{\cos \pi x}{1-x}\right] d\mu$$

$$= \int_1^{+\infty} \left[\frac{2}{1-x^2}\left[1 + \cos \pi x\right]\right] d\mu \leq 0$$

Dunque, poiché $\sin(t) \geq 0$ su $[0,\pi]$ deve essere $\int_1^{+\infty} \cos(tx)\, d\mu = 0$ per qualche $t \in [0,\pi]$. Si noti che per $t=0$ si ha $\int_1^{+\infty} \cos(tx)\, d\mu = \mu(1,+\infty)$ e che $t \mapsto \int_1^{+\infty} \cos(tx)\, d\mu(x)$ è continua.

Esercizio. Sia μ una misura Boreliana finita su $[1,+\infty)$. Provare che $F(t) = \int_1^{+\infty} \cos(tx)\, d\mu(x)$ ha uno zero su $[0,\pi]$.

Esercizio Sia $f \in C^1([0,1])$, $f(0) = 0 = f(1)$. Provare che:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 f'(x)^2\,dx.$$

Ho

$$f(x) = \int_0^x f'(\xi)\,d\xi$$

$$f(x) = -\int_x^1 f'(\xi)\,d\xi.$$

$$\left(\int_0^1 \int_0^x f'(\xi)\,d\xi\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f'(\xi)\,(1-\xi)\,d\xi\right)^2$$

$$\|$$

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \int_x^1 f'(\xi)\,d\xi\,dx\right)^2 \quad \xi \ge x$$

$$= \left(\int_0^1 f'(\xi)\,\xi\,d\xi\right)^2$$

Più precisamente, per parti si trova:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f'(\xi)\,(1-\xi)\,d\xi \\ \displaystyle -\int_0^1 f'(\xi)\,\xi\,d\xi \end{cases}$$

e quindi

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(\xi)\,(1-2\xi)\,d\xi$$

Hölder

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(\xi)|^2\,d\xi \cdot \int_0^1 (1-2\xi)^2\,d\xi$$

Calcolo

$$\int_0^1 (1-2\xi)^2 d\xi = \int_0^1 1 - 4\xi + 4\xi^2 = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

L'unica disuguaglianza usata è quella di Hölder.

Impongo

$$f'(\xi) = 1-2\xi$$

$$f(\xi) = \xi - \xi^2 \qquad (f(0) = f(1) = 0).$$

Soluzione

$$f(\xi) = \lambda(\xi - \xi^2) \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO Dominio, continuità, derivabilità:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\, dt .$$

Calcolare F.

- $x \in \mathbb{R}$ fissato, esiste $c>0$ tale che $\log(1+x^2t^2) \le \{c\,|t|^{1/2}+1\}\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2}+1}{1+t^2}\, dt < +\infty \quad \Rightarrow \quad F(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Fissato $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, per $|x-y| \le \varepsilon$ si ha $\log(1+y^2t^2) \le c\{|t|^{1/2}+1\}$ $\forall t$.

Poiché

$$\frac{t^{1/2}+1}{1+t^2} \in L^1(0,+\infty)$$

dalla conv. dominata segue che

$$\lim_{y \to x} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+y^2t^2)}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\, dt = F(x).$$

Quindi $F \in C(\mathbb{R})$.

- Consideriamo

$$\varphi_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} .$$

Per $0 < \varepsilon \le x \le M < +\infty$ si ha

$$|\varphi_x(t)| \le C_{\varepsilon M} \frac{1}{1+t^2} \in L^1(0,\infty)$$

Quindi segue che F è derivabile per $x \neq 0$ e

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\, dt , \quad x \neq 0 .$$

La funzione F è pari. Quindi, se esiste $F'(0)$ deve essere $F'(0)=0$.

Per $x \neq 0$ calcolo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{A}{(1+x^2t^2)} + \frac{B}{1+t^2} \right\} dt$$

$$t^2 = A(1+t^2) + B(1+x^2t^2)$$
$$= A+B + t^2(A+Bx^2)$$

$$\begin{cases} A = -B \\ A + Bx^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{''} \\ A - Ax^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{1-x^2} \end{cases}$$

(Da precisare in seguito, $x = \pm 1$)

$$t|x| = \tau$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left\{ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt \right\} \qquad (x>0)$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left\{ \frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau \right\}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left\{ \left(\frac{1}{|x|} - 1\right)\frac{\pi}{2} \right\} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1-|x|}{|x|}$$

Dunque

$$F'(x) = \begin{cases} \cancel{2x}\,\dfrac{\pi}{\cancel{2}}\,\dfrac{1}{1-x^2}\,\dfrac{1-x}{\cancel{x}} & x>0 \\[2ex] x\pi\,\dfrac{1}{1-x^2}\,\dfrac{1+x}{-x} & x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi\,\dfrac{1}{1+x} & x>0 \\[2ex] -\pi\,\dfrac{1}{1-x} & x<0 \end{cases}$$

Dunque F non è derivabile in $x=0$.

Calcolo di F, so che $F(0) = 0$. Dunque per $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x F'(\xi)\, d\xi = \int_0^x \frac{\pi}{1+\xi}\, d\xi$$

$$= \pi \Big[\log(1+\xi) \Big]_0^x = \pi \log(1+x).$$

In definitiva

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\, dt = \pi \log(1+|x|), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

F non è derivabile in $x=0$.