ESERCIZIO Sia $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione continua e positiva: $\phi(x)>0$ $\forall x\in[0,1]$. Provare che per ogni $f\in L^\infty([0,1])$ si ha

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_{[0,1]}|f(x)|^p\,\phi(x)dx\right)^{1/p} = \|f\|_\infty .$$

Soluzione. Si ha

$$\left(\int_{[0,1]}|f(x)|^p\,\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty \left(\int_{[0,1]}\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e siccome $\int_{[0,1]}\phi(x)\,dx>0$:

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_{[0,1]}\phi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

da cui

$$\limsup_{p\to\infty}\left(\int_{[0,1]}|f(x)|^p\,\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty .$$

Stima dal basso. Fissato $\varepsilon>0$ l'insieme

$$A_\varepsilon = \{x\in[0,1] : |f(x)|\geq\|f\|_\infty-\varepsilon\}$$

ha misura positiva: $\mathcal{L}^1(A_\varepsilon)>0$.

Inoltre esiste $\delta>0$ tale che $\phi(x)\geq\delta>0$ $\forall x\in[0,1]$

Dunque:

$$\left(\int_{[0,1]} |f(x)|^p \, \phi(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{A_\varepsilon} |f(x)|^p \, \phi(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \left(\|f\|_\infty - \varepsilon \right) \left(\delta \cdot \mathcal{L}^1(A_\varepsilon) \right)^{\frac{1}{p}}$$

da cui

$$\liminf_{p \to \infty} \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^p \, \phi(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \left(\|f\|_\infty - \varepsilon \right) \lim_{p \to \infty} \left(\delta \cdot \mathcal{L}^1(A_\varepsilon) \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$$

dove $\varepsilon > 0$ è arbitrario.

Con $\varepsilon \to 0^+$ si ottiene

$$\liminf_{p \to \infty} \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^p \, \phi(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \|f\|_\infty$$

e la tesi segue.

$\square$

ESERCIZIO Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di probabilità, ovvero $\mu(X) = 1$, e sia $f \in L^1(X)$ una funzione tale che $f(x) \geq 1$ $\forall x \in X$. Provare che

$$\lim_{p \to 0^+} \left(\int_X f(x)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\int_X \log(f(x)) \, d\mu \right).$$

Soluzione.

$$\left(\int_X f(x)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{1}{p} \log\left(\int_X f(x)^p \, d\mu \right) \right)$$

Consideriamo la funzione

$$\phi(p) = \log\left(\int_X f(x)^p \, d\mu \right)$$

definita per $1 \geq p \geq 0$. In particolare

$$\phi(0) = \log\left(\int_X 1 \, d\mu \right) =$$

$$= \log(\mu(X)) = \log 1 = 0$$

- ϕ è continua per $p \in [0,1]$. Convergenza dominata
- Affermiamo che ϕ è derivabile per $0 < p < 1$

$$\phi'(p) = \frac{\int_X f(x)^p \log f(x) \, d\mu}{\int_X f(x)^p \, d\mu}$$

Questo segue dal fatto che

$$t^p \log t \leq C_p t \quad \forall\ t \geq 1$$

$C_p > 0$ costante

per ogni $0 < p < 1$. Inoltre C_p è uniforme ad esempio per $0 < p \leq 1/2$.

Dunque

$$f(x)^p \log f(x) \leq C f(x) \in L^1(X)$$

$$\forall\ 0 < p \leq 1/2$$

Si può dunque derivare sotto segno di integrale

Per il Teorema di Hospital:

$$\lim_{p \to 0^+} \frac{\log\left(\int_X f(x)^p d\mu\right)}{p} = \lim_{p \to 0^+} \frac{\int_X f(x)^p \log f(x)\, d\mu}{\int_X f(x)^p d\mu}$$

$$= \int_X \log f(x)\, d\mu ,$$

L'affermazione segue.

$\square$

ESERCIZIO Sia $f:\mathbb{R}$ una funzione 1-periodica localmente integrabile e sia $\phi \in C([0,1])$ una funzione continua. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\phi(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 \phi(x)\,dx$$

Soluzione. Cambio di variabile $nx = y$

$$\int_0^1 f(nx)\phi(x)\,dx = \int_0^n f(y)\,\phi\left(\frac{y}{n}\right)\frac{dy}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{i-1}^{i} f(y)\,\phi\left(\frac{y}{n}\right)dy \qquad y = i-1+z$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f(i-1+z)\,\phi\left(\frac{i-1+z}{n}\right)dz$$

f è 1-periodica

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f(z)\,\phi\left(\frac{i-1+z}{n}\right)dz$$

ϕ è uniformemente continua in $[0,1]$ e quindi dato $\varepsilon>0$ si ha

$$\left|\phi\left(\frac{i-1+z}{n}\right) - \phi\left(\frac{i-1}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$$

per ogni n sufficientemente grande e $\forall i$ $\forall z \in [0,1]$

Dunque

$$\int_0^1 f(nx)\,\phi(x)\,dx \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f(z)\left(\phi\left(\frac{i-1}{n}\right)+\varepsilon\right)dz =$$

$$= \int_0^1 f(z)\,dz \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\frac{i-1}{n}\right) + \varepsilon\right)$$

Siccome ϕ è continua !

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\frac{i-1}{n}\right) = \int_0^1 \phi(x)\,dx$$

"somme di Riemann"

Dunque

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\phi(x)\,dx \le$$

$$\le \int_0^1 f(z)\,dz \cdot \left(\int_0^1 \phi(z)\,dz + \varepsilon\right)$$

e in modo analogo

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\phi(x) \ge \int_0^1 f(z)\,dz\left(\int_0^1 \phi\,dz - \varepsilon\right)$$

Con $\varepsilon \to 0^+$ il risultato segue.

$\square$