Analisi Reale 2014-15 — Foglio 3

Continuità e derivabilità di funzioni integrali — 29 Ottobre 2014

Esercizio 1 Provare che la funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(y-x)^2}{\sqrt{y}} \sin\left(\frac{1}{y-x}\right) dy, \quad x \in (0,1),$$

è continua.

Esercizio 2 Provare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

è effettivamente definita su tutto $\mathbb{R}$, che è continua e derivabile. Calcolare f in forma non integrale.

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathrm{e}^{tx} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x \in (-1,1)$. Sia $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} f(t) dt, \quad -1 < x < 1.$$

Provare che φ è derivabile su $(-1,1)$.

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)| dx \leqslant 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. È vero che $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$?

Esercizio 5 Data $f \in L^1(0,1)$, definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{n f(y)}{1+n^2(y-x)^2} dy.$$

Provare che se f è continua in $x_0 \in (0,1)$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$