Analisi Reale 2014-15 Foglio 4

Spazi L^p, convergenza forte e debole — 6 Novembre 2014

Foglio di esercizi impegnativi.

Esercizio 1 Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $\mu(X) < \infty$. Dato $1 \leqslant p < \infty$, provare che ogni funzione $f : X \to \mathbb{R}$ verifica

$$f \in L^p(X) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^p \mu(A_k) < \infty,$$

dove $A_k = \{x \in X : k-1 \leqslant |f(x)| < k\}$.

Esercizio 2 Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p([0,1])$, $1 \leqslant p < \infty$, uniformemente limitata $\|f_n\|_p \leqslant C < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che $f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$.

i) Provare che $f \in L^p([0,1])$.

ii) Se $1 < p < \infty$, provare che $f_n \to f$ in $L^q([0,1])$ per ogni $1 \leqslant q < p$.

Sugg. ii) Hölder $\to$ uniforme integrabilità.

Esercizio 3 Sia $1 < p < \infty$. Provare che esiste una costante $C_p > 0$ tale che per ogni funzione $f \in C^2([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ si ha

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leqslant C_p \Big(\int_0^1 |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} \Big(\int_0^1 |f''(x)|^q dx \Big)^{1/q},$$

dove $1/p + 1/q = 1$ sono esponenti Hölder coniugati. Calcolare la costante ottimale C_p quando $p = 2$ e le funzioni che la realizzano.

Sugg. $f'^2 = f'f'$, integrare per parti e poi Hölder; con $p = 2$, integrare $f'' = \lambda f$ e discutere $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 ★ Provare che ogni funzione $f \in C^1([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ verifica

$$\Big(\int_0^1 f(x) dx \Big)^2 \leqslant \frac{1}{12} \int_0^1 f'(x)^2 dx.$$

Determinare tutte le funzioni per cui si ha uguaglianza.

Esercizio 5 Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $[\log n, \log(n+1)]$. Stabilire per quali $1 \leqslant p < \infty$ la successione di funzioni $\varphi_n = \sqrt{n}\chi_n$:

i) converge fortemente in $L^p(0,\infty)$.

ii) converge debolmente in $L^p(0,\infty)$. ★★