Analisi Reale 2014-15 Foglio 5

Esercizi vari 20 Novembre 2014

Esercizio 1 Studiare la convergenza puntuale, quasi ovunque, uniforme, in L^1, in L^2, in L^2-debole, e in misura della successione di funzioni $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{1/n}{x^2 + 1/n^2}.$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è lineare.

Sugg. Regolarizzazioni.

Esercizio 3 Sia $\varphi : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Definiamo la successione di funzioni $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \varphi(n)\chi_{(0,1/n]}(x)$, per $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in [0, 1]$.
A) Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $L^1([0, 1])$.

ii) La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente integrabile.

iii) Si ha $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)/t = 0$.

B) Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

a) Esiste $g \in L^1([0, 1])$ tale che $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in [0, 1]$.

b) Si ha

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Esercizio 4 Sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme chiuso e consideriamo l'insieme di funzioni

$$X = \{f \in L^2([0, 1]) : f(x) \in K \text{ per q.o. } x \in [0, 1]\}.$$

i) Provare che X è chiuso in $L^2([0, 1])$ per la convergenza forte.

ii) Sia ora $K \subset \mathbb{R}$ un *intervallo* chiuso. Provare che X è chiuso per la convergenza debole di $L^2([0, 1])$.

iii) ★ Dare un esempio di insieme chiuso $K \subset \mathbb{R}$ tale che X non sia chiuso per la convergenza debole di $L^2([0, 1])$.

Sugg. iii) $f(x) = 1$ su $[0,1/2]$ ed $f(x) = -1$ su $(1/2,1)$ estesa per 1-periodicità. Considerare $f_n(x) = f(nx)$. Provare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx \int_0^1 f(x) dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C([0,1])$.

Esercizio 5 ★★ Sia $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di numeri reali e consideriamo l'insieme

$$A = \Big\{ x \in [0,2\pi] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\sin(nx)| < \infty \Big\}.$$

Provare che

$$\mathscr{L}^1(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Sugg. $|\sin(nx)| \geqslant \sin^2(nx) = 1 - \cos^2(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx)$. Teorema di Riemann-Lebesgue.