Analisi Reale

Anno Accademico 2015-2016

Roberto Monti

Appunti finali del corso

Versione del 15 gennaio 2015

Indice

,

CAPITOLO 1

Introduzione alla teoria della misura

1. Misure esterne e misure su σ-algebre. Criterio di Carathéodory

In questa sezione introduciamo la definizione di misura esterna, di σ-algebra, e di misura su una σ-algebra. Per il Criterio di Carathéodory, a partire da una misura esterna si può produrre una σ-algebra, detta "degli insiemi misurabili". La misura esterna ristretta a tale σ-algebra è una misura.

Nel seguito X è un insieme e $\mathscr{P}(X)$ è l'insieme delle parti di X.

Definizione 1.1 (Misura esterna). Una funzione $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ è una *misura esterna* se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;
ii) se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$ (proprietà di *monotonia*);
iii) per ogni successione di insiemi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X vale la *subadditività numerabile*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.1}$$

Una σ-algebra è una famiglia di insiemi chiusa per complemento, intersezioni ed unioni numerabili. Più precisamente:

Definizione 1.2 (σ–algebra). Un insieme $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ è una σ–algebra dell'insieme X se:

i) $\emptyset, X \in \mathscr{A}$;
ii) se $A \in \mathscr{A}$ allora $A' = X \setminus A \in \mathscr{A}$;
iii) se $A_k \in \mathscr{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Osservazione 1.3. Se $A_k \in \mathscr{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora si ha $A'_k \in \mathscr{A}$ e quindi dalla iii) segue che

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big)' = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \in \mathscr{A}.$$

Di conseguenza, dalla ii) si deduce che $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Analogamente, se $A, B \in \mathscr{A}$ allora $A \setminus B = A \cap B' \in \mathscr{A}$.

Definizione 1.4 (Misura e spazio di misura). Sia $\mathscr{A}$ una σ–algebra su un insieme X. Una funzione $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ è una misura (positiva) se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;
ii) se $A_k \in \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$, è una successione di insiemi mutualmente disgiunti, allora vale l'*additività numerabile*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.2}$$

La terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ si dice *spazio di misura.*

Esempio 1.5 (Misura di Dirac). Sia X un insieme e fissiamo un punto $x_0 \in X$. La funzione $\delta : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A, \\ 0 & \text{se } x_0 \in X \setminus A, \end{cases}$$

è una misura sulla σ-algebra $\mathscr{P}(X)$, detta delta di Dirac concentrata in x_0.

Esempio 1.6 (Counting measure). Sia X un insieme e definiamo la funzione $\chi : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\chi(A) = \begin{cases} \#A = \mathrm{Card}(A) & \text{se } \mathrm{Card}(A) < \infty, \\ \infty & \text{se la cardinalità di } A \text{ non è finita.} \end{cases}$$

La funzione χ è una misura su X detta *counting measure.*

Esercizio 1.7. Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}$ tale che $\mu([\alpha, \beta]) \le (\beta - \alpha)^2$ per ogni $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Provare che $\mu = 0$.

Esercizio 1.8. Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, tale che

$$\mu(B_r(x)) \le r^{n+\varepsilon}$$

per ogni $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e per un fissato $\varepsilon > 0$. Provare che $\mu = 0$. Notazione: $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ è la palla Euclidea.

Torniamo alle misure esterne, e definiamo la nozione di insieme misurabile.

Definizione 1.9 (Insieme misurabile). Sia X un insieme e sia μ una misura esterna su X. Un insieme $A \subset X$ si dice $\mu-$*misurabile* se per ogni $E \subset X$ vale la *proprietà di spezzamento*

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A'). \tag{1.3}$$

Indicheremo con $\mathscr{M}(X, \mu)$ o più semplicemente con $\mathscr{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili di X rispetto alla misura esterna μ.

Osservazione 1.10. La disuguaglianza $\mu(E) \le \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A')$ è sempre verificata, per la subadditività della misura esterna.

La costruzione di Carathèodory ci assicura che $\mathscr{M}$ è una σ-algebra su X.

Teorema 1.11 (Criterio di Carathéodory). Sia μ una misura esterna su un insieme X. La famiglia $\mathscr{M}$ degli insiemi μ–misurabili è una σ–algebra ed inoltre la restrizione $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ è una misura. Inoltre, questa misura è completa nel senso che $\mu(A) = 0$ implica $A \in \mathscr{M}$.

Dim. È immediato vedere che $\emptyset \in \mathscr{M}$. Inoltre, dalla simmetria della definizione di insieme misurabile segue che $A \in \mathscr{M}$ se e solo se $A' \in \mathscr{M}$.

Proviamo che se $A_k \in \mathscr{M}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora si ha anche

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{M}.$$

Per induzione, usando la definizione (1.3) di insieme misurabile si trova, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1') \\
&= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2') \\
&= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2' \cap A_3) \\
&\qquad + \mu(E \cap A_1' \cap A_2' \cap A_3') \\
&= \dots \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big)'\Big).
\end{aligned}$$

Dalla proprietà di monotonia della misura esterna segue che

$$\mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \le \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big)'\Big),$$

e quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$\mu(E) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big).$$

Passando al limite per $k \to \infty$ e poi usando la subadditività numerabile della misura esterna si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mu(E) &\ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \\
&\ge \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \\
&\ge \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big) \ge \mu(E).
\end{aligned}$$

Null'ultima disuguaglianza abbiamo usato di nuovo la subadditività della misura esterna. Si conclude che le disuguaglianze precedenti sono tutte uguaglianze, e quindi

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A'),$$

per ogni E, ovvero $A \in \mathscr{M}$. Abbiamo in effetti trovato l'identità più ricca di informazioni:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(E \cap \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) + \mu\Big(E \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)'\Big). \tag{1.4}$$

Mostriamo che μ è $\sigma-$additiva su $\mathscr{M}$. Sia $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con unione disgiunta, e nell'uguaglianza (1.4) scegliamo $E = A$. Usando il fatto che $\mu(\emptyset) = 0$ si ottiene

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Rimane da verificare che μ è completa. Se $\mu(A) = 0$, allora dalla subadditività e dalla monotonia della misura esterna si trova

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A') \leq \mu(A) + \mu(E) = \mu(E),$$

e dunque si hanno uguaglianze e pertanto $A \in \mathscr{M}$. Questo termina la dimostrazione del teorema.

□

2. Misura di Lebesgue e misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$

2.1. Misura di Lebesgue. Introduciamo la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, e la σ-algebra degli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili in $\mathbb{R}^n$.

Un plurintervallo $I \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme del tipo

$$I = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n), \quad \text{con } a_i < b_i \text{ per } i = 1, \ldots, n.$$

La misura del plurintervallo I è definita in modo naturale

$$\operatorname{mis}(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Un *ricoprimento Lebesguiano* di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è una successione di plurintervalli $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Definiamo la *misura esterna di Lebesgue* $\mathscr{L}^n : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ponendo per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathscr{L}^n(A) = \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mis}(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ricoprimento Lebesguiano di } A \Big\}.$$

Verifichiamo che la funzione di insiemi $\mathscr{L}^n : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ è una misura esterna. Certamente $\mathscr{L}^n(\emptyset) = 0$ e $\mathscr{L}^n(A) \leq \mathscr{L}^n(B)$ se $A \subset B$, dal momento che tutti i ricoprimenti Lebesguiani di B sono anche ricoprimenti di A.

Proviamo la subadditività numerabile (1.1). Sia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi di $\mathbb{R}^n$. Se il membro di destra in (1.1) non è finito, ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k) = \infty,$$

allora non c'è nulla da provare. Possiamo allora supporre che la serie converga e quindi $\mathscr{L}^n(A_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I_i^k : i \in \mathbb{N}\}$ di A_k tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mis}(I_i^k) \leq \mathscr{L}^n(A_k) + \varepsilon / 2^k.$$

La famiglia di plurintervalli $\{I_i^k : i, k \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento Lebesguiano di $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, e dunque

$$\mathscr{L}^n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mis}(I_i^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathscr{L}^n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k).$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene la tesi.

Per il Criterio di Carathéodory, gli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili formano una σ-algebra $\mathscr{M}$ su cui $\mathscr{L}^n$ è una misura completa: la *misura di Lebesgue*. Un insieme $A \in \mathscr{M}$ si dice *Lebesgue misurabile*.

Esercizio 1.1. Sia $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ la funzione $\mu(A) = \sqrt{\mathscr{L}^n(A)}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$. Stabilire se μ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Stabilire se μ è una misura sulla σ-algebra dei Lebesgue misurabili.

2.2. Misure di Hausdorff. Sia $n \geq 1$ un intero e sia $s \geq 0$ un parametro dimensionale reale. Definiamo la costante

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)},$$

dove

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s-1}\, dx, \quad s > 0,$$

è la funzione Γ di Eulero. Il significato di questa costante è che per $s = k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\omega_k = \mathscr{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : |x| < 1\}),$$

la misura di Lebesgue della palla unitaria k-dimensionale. Ricordiamo che il diametro di un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è per definizione

$$\operatorname{diam}(E) = \sup_{x,y \in E} |x - y|.$$

Per ogni $\delta > 0$, definiamo la "premisura" di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, la funzione $\mathscr{H}^s_\delta : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, ponendo per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \inf \Big\{ \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\frac{\operatorname{diam}(E_k)}{2} \Big)^s : E_k \subset \mathbb{R}^n,\ \operatorname{diam}(E_k) \leq \delta,\ A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \Big\}.$$

Definiamo quindi la misura di Hausdorff s-dimensionale $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, ponendo

$$\mathscr{H}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathscr{H}^s_\delta(A).$$

La funzione $\mathscr{H}^s$ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. La dimostrazine di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per la misura di Lebesgue e viene omessa. Per ogni $s \geq 0$, gli insiemi $\mathscr{H}^s$-misurabili formano una σ-algebra su cui $\mathscr{H}^s$ è una misura, la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.1. (Formula della lunghezza, senza dimostrazione) Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva iniettiva di classe C^1 e sia $\mathscr{H}^1$ la misura di Hausdorff 1-dimensionale nel piano. Allora vale la seguente formula della lunghezza:

$$\mathscr{H}^1\big(\gamma([0, 1])\big) = \int_0^1 |\dot\gamma(t)| dt.$$

Esempio 1.2. (Dimensione dell'insieme di Cantor, senza dimostrazione) Sia $K \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ l'insieme di Cantor 1/3 e sia $\mathscr{H}^s$ la misura di Hausdorff s-dimensionale su $\mathbb{R}$, $0 \le s \le 1$. Allora si ha:

$$\mathscr{H}^s(K) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \le s < \log 2/\log 3 \\ 1 & \text{se } s = \log 2/\log 3 \\ 0 & \text{se } \log 2/\log 3 < s \le 1. \end{cases}$$

Esercizio 1.3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione α-Hölderiana, ovvero tale che $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$ dove $\alpha \in (0,1]$ ed $L \ge 0$ è una costante, e sia $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$ il suo grafico.

i) Provare che $\mathscr{L}^2(G) = 0$.
ii) Determinare valori di $s \in [0,2]$ tali che $\mathscr{H}^s(G) = 0$.

Soluzione. Discutiamo il punto ii). Fissato $\delta > 0$ vogliamo trovare un ricoprimento (numerabile o meglio ancora finito) di G che sia "accurato". Vogliamo insiemi E_i tali che $\operatorname{diam}(E_i^\delta) < \delta$,

$$G \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i^\delta,$$

e tali che sia possibile determinare dei valori di $s \in [0,2]$ tali che

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(E_i^\delta)^s = 0.$$

Per tali s avremo

$$0 \le \mathscr{H}^s(G) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}^s_\delta(G) \le \frac{\omega_s}{2^s} \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(E_i^\delta)^s = 0.$$

Iniziamo la costruzione del ricoprimento. Fissato $n \in \mathbb{N}$ consideriamo per $i = 1, \dots, n$ e $j \in \mathbb{Z}$ i quadrati

$$Q_{ij} = \Big[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\Big] \times \Big[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\Big].$$

Chiaramente, si ha

$$G \subset [0,1] \times \mathbb{R} = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j \in \mathbb{Z}}} Q_{ij}.$$

Diciamo che un quadrato Q_{ij} è "attivato" se $Q_{ij} \cap G \neq \emptyset$. Contiamo il numero massimo di quadrati Q_{1j} che sono attivati. Supponiamo ad esempio che sia $(0, f(0)) \in Q_{1j}$ per un certo $j \in \mathbb{Z}$. Per $0 \le x \le 1/n$ si ha

$$|f(x) - f(0)| \le L|x|^\alpha \le \frac{L}{n^\alpha}.$$

Quindi la cardinalità massima dei quadrati attivati nella prima colonna è $L/n^{\alpha-1}$ (approssimativamente). La stessa stima vale per ogni colonna, e in tutto si hanno n colonne. Di conseguenza

$$\sum_{Q_{ij} \text{ attiv.}} \operatorname{diam}(Q_{ij})^s = \sum_{Q_{ij} \text{ attiv.}} \Big(\frac{\sqrt{2}}{n}\Big)^s \le \frac{C_{L,s}}{n^{s+\alpha-2}},$$

dove $C_{L,s} > 0$ è una costante che dipende da L e da s. Se $s > 2 - \alpha$ l'ultima quantità è infinitesima per $n \to \infty$. Questo prova la seguente affermazione:

$$s > 2 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathscr{H}^s(G) = 0.$$

3. Teoremi di continuità per successioni monotone di insiemi misurabili

Una successione $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di X si dice monotona crescente se $A_k \subset A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si dice monotona decrescente se $A_{k+1} \subset A_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.4. Sia μ una misura esterna sull'insieme X e sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi μ-misurabili di X. Allora:

(i) Se la successione è crescente si ha $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$.

(ii) Se la successione è decrescente e $\mu(A_1) < \infty$ si ha $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$.

Dim. (i) Usiamo la proprietà di additività numerabile della misura per gli insiemi misurabili:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu\Big(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).
\end{aligned}$$

Abbimo usato il fatto che la successione è crescente per dire che $\bigcup_{k=1}^m A_k = A_m$.

(ii) Consideriamo la successione $B_k = A_1 \setminus A_k$, $k \in \mathbb{N}$, che è crescente, e dunque

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \setminus A_k\Big) = \mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Siccome $\mu(A_1) < \infty$ si ha $\mu(A_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi l'identità

$$\mu(A_1) = \mu((A_1 \setminus A_k) \cup A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) + \mu(A_k)$$

implica che $\mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$ e la tesi (ii) segue. $\square$

CAPITOLO 2

Teoria dell'integrale

1. Funzioni misurabili

In tutta questa sezione X è un insieme e μ è una misura esterna su X. Diremo misurabili gli insiemi di X che sono μ-misurabili.

Definizione 2.1 (Funzioni misurabili). Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *misurabile* se per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ l'antimmagine $f^{-1}(A) \subset X$ è un insieme misurabile di X.

Ricordiamo che l'antimmagine è l'insieme $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$.

Osservazione 2.2. Una funzione $f : X \to [-\infty, \infty]$ si dirà misurabile se gli insiemi $f^{-1}(\{-\infty\})$ ed $f^{-1}(\{\infty\})$ sono misurabili ed è verificata la condizione della definizione precedente.

Proposizione 2.3. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni.

1) $f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
2) $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
3) $f^{-1}(]\alpha, \infty[)$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
4) $f^{-1}([\alpha, \infty[)$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
5) $f^{-1}(]\alpha, \beta[)$ è misurabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
6) $f^{-1}(A)$ è misurabile per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$.

Dim. La prova è elementare e viene omessa. La dimostrazione che 1) implica 2) è la seguente:

$$f^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in X : f(x) < \alpha + \frac{1}{k}\Big\},$$

e l'insieme a destra è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili. □

Proposizione 2.4. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni misurabili. Allora anche le funzioni $f + g$, fg, f/g con $g \neq 0$ su X, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e $|f|$ sono misurabili.

Dim. Proviamo che la somma $f + g$ è misurabile. Infatti, dato $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) + g(x) < \alpha\}$ coincide con l'insieme

$$\big\{x \in X : \text{esistono } s, t \in \mathbb{Q} \text{ tali che } f(x) < s,\ g(x) < t \text{ e } s + t < \alpha\ \big\}$$

ovvero si ha

$$(f + g)^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \bigcup_{\substack{s,t\in\mathbb{Q}\\ s+t<\alpha}} f^{-1}(]-\infty, s[) \cap g^{-1}(]-\infty, t[),$$

e l'insieme a destra è misurabile in quanto unione numerabile di misurabili.

Poi osserviamo che, dato $\alpha \geq 0$, si ha $\{f^2 > \alpha\} = \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\}$ e quindi f^2 è misurabile. Dunque, anche il prodotto di funzioni $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ è misurabile. Lasciamo al lettore il compito di verificare la misurabilità di $1/g$.

Le funzioni $f^+ = f\chi_{\{f\geq 0\}}$ ed $f^- = -f\chi_{\{f\leq 0\}}$ sono misurabili in quanto prodotto di funzioni misurabili. Quindi è misurabile anche la funzione $|f| = f^+ + f^-$.

□

Nella dimostrazione precedente abbiamo usato la notazione $\chi_A = 1_A$ per la funzione caratteristica di un insieme.

Definizione 2.5. La funzione caratteristica di un insieme $A \subset X$ è la funzione $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

La funzione χ_A è misurabile se e solo se A è misurabile.

Osservazione 2.6 (Richiami su lim inf e lim sup). Il limite inferiore e il limite superiore di una successione di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono definiti nel seguente modo:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n \quad \in [-\infty, \infty],$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n \quad \in [-\infty, \infty].$$

Equivalentemente, risulta $L = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ se e solo se:

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \geq L - \varepsilon$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n \leq L + \varepsilon$.

Una caratterizzazione analoga vale per il limite superiore. Di conseguenza, il limite inferiore può essere visto come l'estremo inferiore dell'insieme dei limiti delle sottosuccessioni convergenti di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Precisamente, detto $A \subset [-\infty, \infty]$ l'insieme

$$A = \Big\{ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in [-\infty, \infty] : (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ sottosuccessione di } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con limite} \Big\},$$

avremo

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf A \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup A.$$

Infatti, il limite superiore è l'estremo superiore dell'insieme dei limiti delle sottosuccessioni convergenti.

Elenchiamo alcune proprietà dei limiti inferiore e superiore:

1) Il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste finito o $\pm\infty$ se e solo se $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.
2) Si ha sempre $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$
3) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n)$.
4) $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \geq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$.
5) Se una delle due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oppure $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite, allora in 3) e 4) vale l'uguaglianza.
6) Si ha $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$, e se $a_n > 0$ vale $\liminf_{n\to\infty} a_n^{-1} = (\limsup_{n\to\infty} a_n)^{-1}$.

Proposizione 2.7. Siano $f_k : X \to [-\infty, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili. Allora anche le funzioni

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \liminf_{k\to\infty} f_k, \quad \limsup_{k\to\infty} f_k$$

sono misurabili. In particolare, il limite puntuale di funzioni misurabili, se esiste, è una funzione misurabile.

Dim. Proviamo che la funzione $g = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ è misurabile. Infatti, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) < \alpha\}$$

e quindi $g^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ è un insieme misurabile.

In modo analogo, detta $h = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{x \in X : h(x) > \alpha\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) > \alpha\}$$

e quindi $h^{-1}(]\alpha, \infty[) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}(]\alpha, \infty[)$ è un insieme misurabile.

Infine, anche le funzioni

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} f_n(x), \qquad \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} f_n(x)$$

sono misurabili. □

Ora proviamo che le funzioni misurabili non negative si possono approssimare con funzioni di struttura speciale.

Definizione 2.8 (Funzione semplice). Una funzione misurabile $\varphi : X \to \mathbb{R}$ si dice *funzione semplice* se l'insieme $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ ha cardinalità finita.

Data una funzione semplice φ, esistono un numero finito di insiemi misurabili $A_1, \dots, A_n \subset X$ e delle costanti $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{con unione disgiunta,}$$

ed inoltre

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in X. \tag{2.1}$$

Se richiediamo che i valori $c_1, \dots, c_n$ siano distinti e che gli insiemi $A_1, \dots, A_n$ siano disgiunti, allora la rappresentazione è unica.

Teorema 2.9. Sia $f : X \to [0, \infty]$ una funzione misurabile non negativa. Esiste una succesione crescente $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tali che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

per ogni punto $x \in X$. Inoltre, la convergenza è uniforme se f è limitata.

Dim. Per $n \in \mathbb{N}$ ed $i = 1, 2, \ldots, n2^n$ consideriamo gli intervalli

$$I_{in} = \Big[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\Big).$$

Gli insiemi

$$A_{in} = f^{-1}(I_{in}) \quad \text{e} \quad A_n = f^{-1}([n, \infty])$$

sono misurabili. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la funzione semplice

$$\varphi_n(x) = n\chi_{A_n}(x) + \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_{in}}(x), \quad x \in X.$$

Chiaramente si ha $\varphi_n(x) \leq f(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in X$.

i) Affermiamo che $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ per ogni $x \in X$ ed $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in A_{n+1}$ allora $f(x) \geq n+1$ e $\varphi_{n+1}(x) = n+1$. Dunque, banalmente $f(x) \geq n$ e pertanto $x \in A_n$, da cui $\varphi_n(x) = n$, e la monotonia segue. Se invece $x \in A_{i,n+1}$, con $i = 1, \ldots, (n+1)2^{n+1}$ allora si ha

$$f(x) \in \Big[\frac{i-1}{2^{n+1}}, \frac{i}{2^{n+1}}\Big) \quad \text{e} \quad \varphi_{n+1}(x) = \frac{i-1}{2^{n+1}}.$$

È possibile scegliere $j \in \mathbb{N}$ tale che $i \leq 2j \leq i+1$. In questo modo si hanno le disuguaglianze

$$\frac{j-1}{2^n} = \frac{2j-2}{2^{n+1}} \leq \frac{i-1}{2^{n+1}} < \frac{i}{2^{n+1}} \leq \frac{j}{2^n},$$

ovvero $I_{i,n+1} \subset I_{jn}$. Di conseguenza $x \in A_{i,n+1}$ implica che $x \in A_{jn}$ e pertanto

$$\varphi_n(x) = \frac{j-1}{2^n} \leq \frac{i-1}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(x).$$

ii) Affermiamo che per ogni $x \in X$ si ha la convergenza puntuale

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Se $f(x) = \infty$ allora $x \in A_n$ ovvero $\varphi_n(x) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La tesi segue. Se invece $f(x) < N \in \mathbb{N}$ è finito, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $i_n \in \{1, \ldots, N2^n\}$ tale che

$$f(x) \in \Big[\frac{i_n - 1}{2^n}, \frac{i_n}{2^n}\Big),$$

ma allora

$$f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Se f è limitata, allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $f(x) < N$ per ogni $x \in X$. Di conseguenza si ha $A_n = \emptyset$ per ogni $n > N$, e dunque ogni $x \in X$ verifica la stima (2.2). Questa è la convergenza uniforme. □

2. Convergenza quasi ovunque. Teorema di Egorov

Sia μ una misura esterna su un insieme X. Diciamo che una successione di funzioni $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, converge quasi ovunque (q.o.) ad una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ se esiste un insieme $N \subset X$ di misura nulla, $\mu(N) = 0$, tale che per ogni $x \in X \setminus N$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Il Teorema di Egorov mostra che la convergenza quasi ovunque di funzioni misurabili implica la convergenza uniforme su un insieme di misura grande.

Teorema 2.10 (Egorov). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $\mu(X) < \infty$, e siano $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili tali che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in X$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dim. A meno di togliere da X un insieme di misura nulla, non è restrittivo supporre che $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, per ogni $x \in X$. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ definiamo gli insiemi

$$S_{n,k} = \bigcap_{j\geq n} \Big\{ x \in X : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \Big\}.$$

Ogni insieme $S_{n,k}$ è misurabile, si ha la monotonia $S_{n,k} \subset S_{n+1,k}$, e inoltre $\bigcup_{n=1}^\infty S_{n,k} = X$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti, fissato $x \in X$, in virtù della convergenza puntuale esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ per ogni $j \geq n$, ovvero $x \in S_{n,k}$.

Per la continuità della misura per successioni monotone, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S_{n,k}) = \mu(X),$$

ed essendo la misura μ finita, si deduce che per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato

$$\lim_{n\to\infty} \mu(X \setminus S_{n,k}) = 0.$$

Pertanto, dato $\varepsilon > 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(X \setminus S_{n_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Definiamo l'insieme $X_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^\infty S_{n_k,k}$. La misura del complementare si stima nel seguente modo:

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty X \setminus S_{n_k,k} \Big) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(X \setminus S_{n_k,k}) \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Chiaramente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $X_\varepsilon \subset S_{n_k,k}$ e dunque per ogni $n \geq n_k$ si ha

$$\sup_{x\in X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

Questa è la convergenza uniforme su X_ε. $\square$

3. Integrale di Lebesgue

Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. In questa sezione definiamo l'integrale di Lebesgue di funzioni misurabili. Partiamo dalle funzioni semplici, poi definiamo l'integrale di funzioni non negative e solo alla fine definiamo l'integrale di funzioni con segno.

Ricordiamo che una funzione semplice è della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in X,$$

con A_i insiemi misurabili disgiunti e $c_i \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.11 (Integrale di una funzione semplice). L'integrale di una funzione semplice non negativa $\varphi : X \to [0, \infty)$ è per definizione

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) \in [0, \infty].$$

Convenzione. In questa definizione, conveniamo che $c_i \mu(A_i) = 0$ quando $c_i = 0$ e $\mu(A_i) = \infty$.

Definizione 2.12 (Integrale di una funzione misurabile non negativa). Definiamo l'integrale di una funzione misurabile non negativa $f : X \to [0, \infty]$ come

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \Big\{ \int_X \varphi(x) d\mu \, : \, \varphi \text{ f.s. tale che } 0 \le \varphi \le f \text{ su } X \Big\} \in [0, \infty].$$

Se l'integrale è finito diremo che la funzione f è *integrabile* su X.

Esercizio 2.13. Una funzione semplice numerabile è una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ è numerabile, ed è della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in X,$$

con $A_i \subset X$ disgiunti e $c_i \in \mathbb{R}$. Provare – con gli strumenti visti finora – che per una funzione semplice numerabile non negativa vale ancora la formula

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(A_i).$$

La dimostrazione sarà immediata con il teorema della convergenza monotona.

Definiamo ora l'integrale per le funzioni con segno. Data una funzione $f : X \to [-\infty, \infty]$, definiamo la sua parte positiva e la sua parte negativa

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\},$$

di modo che $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ ed $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Definizione 2.14. Diciamo che una funzione misurabile $f : X \to [-\infty, \infty]$ è *sommabile* se la funzione $|f|$ è integrabile. In questo case scriviamo $f \in L^1(X) = L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ e definiamo l'integrale di f su X in $d\mu$

$$\int_X f(x)d\mu = \int_X f^+(x)d\mu - \int_X f^-(x)d\mu.$$

Non c'è una convenzione universale sul significato dei termini “integrabile” e “sommabile”. Noi li useremo come sinonimi. Un limite dell'integrale di Lebesgue è che, nel caso di indeterminazioni $\infty - \infty$, non rileva eventuali cancellazioni fra le “aree positive” e le “aree negative” nel sottografico della funzione integranda f, come invece riesce a fare l'integrale improprio di Riemann.

Nel seguente teorema elenchiamo le proprietà standard dell'integrale di Lebesgue. La dimostrazione è lasciata come esercizio.

Teorema 2.15. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura.

i) Se $f, g \in L^1(X)$ allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha f + \beta g \in L^1(X)$ ed inoltre
$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu = \alpha \int_X f(x)d\mu + \beta \int_X f(x)d\mu.$$
Questa è la proprietà di linearità dell'integrale.

ii) Se $f, g : X \to [0, \infty]$ sono funzioni misurabili (oppure $f, g \in L^1(X)$) tali che $f(x) \leq g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$, allora
$$\int_X f(x)d\mu \leq \int_X g(x)d\mu.$$
Questa è la proprietà di monotonia dell'integrale.

iii) Per ogni $f \in L^1(X)$ si ha la proprietà di subadditività
$$\Big| \int_X f(x)d\mu \Big| \leq \int_X |f(x)|d\mu.$$

iv) Se $A \subset X$ è misurabile ed $f \in L^1(X)$, allora $f \in L^1(A)$ e si ha
$$\int_A f(x)d\mu = \int_X f(x)\chi_A(x)\, d\mu.$$

La dimostrazione delle proprietà i)–iv) si basa sulla prova delle analoghe affermazioni per l'integrale di funzioni semplici.

Esercizio 2.16. Siano $f, g \in L^1(X)$ due funzioni positive, $f, g > 0$.

1) Provare che
$$\int_X f(x)d\mu + \int_X g(x)d\mu \leq \int_X (f(x) + g(x))d\mu.$$
Questa è la parte facile.

2) Provare – con gli strumenti visti finora – che vale anche la disuguaglianza opposta
$$\int_X f(x)d\mu + \int_X g(x)d\mu \geq \int_X (f(x) + g(x))d\mu.$$
Con il teorema della convergenza monotona la dimostrazione è immediata.

Osservazione 2.17. Anticipando il Teorema di Fubini-Tonelli sullo scambio dell'ordine di integrazione, possiamo dare la seguente interpretazione dell'integrale di Lebesgue. Sia $f \in L^1(X)$ una funzione non negativa, allora

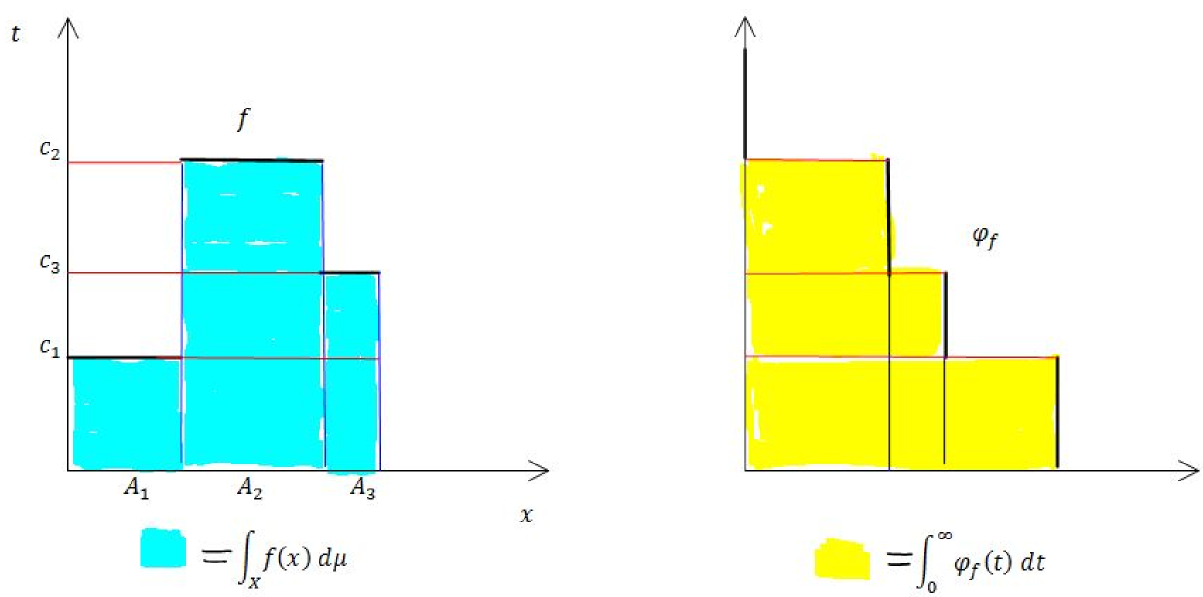
$$\begin{aligned}
\int_X f(x)dx &= \int_X \int_0^{f(x)} dt\, d\mu(x) \\
&= \int_X \int_0^{\infty} \chi_{(0,f(x))}(t) dt\, d\mu(x) \quad \text{[Fubini-Tonelli, ad es. con } \mu(X) < \infty\text{]} \\
&= \int_0^{\infty} \int_X \chi_{(0,f(x))}(t) dt\, d\mu(x) \\
&= \int_0^{\infty} \int_X \chi_{\{f>t\}}(x) d\mu(x)\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt.
\end{aligned}$$

La funzione $\varphi_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$ si dice funzione di ripartizione o funzione di distribuzione di f. Siccome φ_f è monotona decrescente, l'ultimo integrale è definito anche come integrale di Riemann.

Ad esempio per una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ della forma

$$f(x) = c_1\chi_{A_1}(x) + c_2\chi_{A_2}(x) + c_3\chi_{A_3}(x),$$

con la misura di Lebesgue su $[0,1]$ la situazione è la seguente:



4. Assoluta continuità dell'integrale

Vedremo nel seguito del corso le definizioni di funzione assolutamente continua e di misura assolutamente continua. Qui verifichiamo l'assoluta continuità dell'integrale rispetto alla sua misura di riferimento.

Teorema 2.18 (Assoluta continuità dell'integrale). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f \in L^1(X)$ una funzione sommabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni insieme misurabile $A \subset X$ vale l'implicazione

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big| \int_A f(x)\, d\mu \Big| \leq \varepsilon.$$

Dim. A meno di sostituire f con $|f|$, non è restrittivo supporre $f \geq 0$. Siccome $f \in L^1(X)$, il suo integrale è finito, e quindi, per la definizione di integrale, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}, \quad \int_X f(x) d\mu - \int_X \varphi(x) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

dove $n \geq 1$, $A_i \subset X$ sono insiemi misurabili e $c_i \geq 0$ sono costanti tali che $\mu(A_i) = \infty$ implica $c_i = 0$.

Se f non è identicamente nulla, è possibile supporre che anche φ non sia nulla identicamente (q.o.). L'integrale di φ su un insieme misurabile $A \subset X$ è

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap A_i) \leq \mu(A) \sum_{i=1}^n c_i.$$

Dunque, con la scelta

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i}$$

si ha

$$0 \leq \int_A f(x) d\mu \leq \int_X (f(x) - \varphi(x)) d\mu + \int_A \varphi(x) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

non appena $\mu(A) < \delta$. □

5. Teorema della convergenza monotona e Lemma di Fatou

Il Teorema della convergenza monotona, noto anche come Teorema di Beppo Levi, permette di passare con il limite dentro il segno di integrale quando la successione di funzioni integrate è puntualmente crescente. La dimostrazione si basa sulla continuità della misura per successioni crescenti di insiemi.

Teorema 2.19 (Beppo Levi). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni misurabili positive, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per q.o. $x \in X$. Detta $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ la funzione limite, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

Dim. La funzione limite f è misurabile in quanto limite q.o. di funzioni misurabili. Siccome $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, per la monotonia dell'integrale si ha

$$0 \leq \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f_{n+1}(x) d\mu \leq \int_X f(x)\, d\mu.$$

Dunque, il seguente limite esiste e si ha

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu \le \int_X f(x) d\mu.$$

Verifichiamo la disuguaglianza opposta. Se mostriamo che ogni funzione semplice $0 \le \varphi \le f$ verifica

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu \le L,$$

allora la tesi segue. La funzione semplice φ è della forma $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}(x)$ dove $c_i \ge 0$ e $A_i \subset X$ sono insiemi misurabili. Fissato $\delta \in (0,1)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo gli insiemi

$$E_n = \{x \in X : \delta\varphi(x) \le f_n(x)\}.$$

Dalla monotonia $f_n \le f_{n+1}$ segue che $E_n \subset E_{n+1}$, e inoltre dalla convergenza puntuale segue che

$$X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n.$$

Infatti, se $x \in X$ ed $f(x) > 0$ allora si ha $f_n(x) \to f(x) > \delta\varphi(x)$, e dunque $f_n(x) \ge \delta\varphi(x)$ per tutti gli n sufficientemente grandi.

Integrando la disuguaglianza $\delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) \le f_n(x)$ per $x \in X$, e passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu = L.$$

L'integrale al membro di sinistra è

$$\int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu = \sum_{i=1}^k \delta c_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Per la continuità della misura sulle successioni crescenti di insiemi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_i \cap E_n\Big) = \mu\Big(A_i \cap \bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) = \mu(A_i),$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \delta\varphi(x)\chi_{E_n}(x) d\mu = \delta \sum_{i=1}^k c_i \mu(A_i) = \delta \int_X \varphi(x)\, d\mu.$$

Per $\delta \to 1^-$ nella disuguaglianza

$$\delta \int_X \varphi(x) d\mu \le L$$

si ottiene la tesi. □

Dal teorema della convergenza monotona segue il Lemma di Fatou.

Teorema 2.20 (Lemma di Fatou). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazo di misura e sia $f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni misurabili non negative, $f_n \ge 0$. Allora

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

DIM. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la funzione misurabile $g_n : X \to [0,\infty]$

$$g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x), \quad x \in X.$$

La successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Dal Teorema di Beppo Levi segue che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)d\mu.$$

Dal momento che $g_n \leq f_n$, si ha

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\mu.$$

Questa è la tesi.

□

6. Convergenza dominata e Teorema di Lebesgue-Vitali

Il teorema della convergenza dominata è uno degli strumenti più flessibili per passare al limite sotto il segno di integrale.

TEOREMA 2.21 (Convergenza dominata). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili tali che il limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

esista per μ-q.o. $x \in X$.

Se esiste una funzione $g \in L^1(X)$, detta maggiorante, tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per μ-q.o. $x \in X$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f \in L^1(X)$ e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0.$$

In particolare, questo implica che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu.$$

DIM. Le funzioni $g_n : X \to [0,\infty]$,

$$g_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|, \quad x \in X,$$

sono misurabili e positive, $g_n \geq 0$, in quanto $|f_n| \leq g$ ed $|f| \leq g$. Usando la convergenza puntuale $f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$ quando $n \to \infty$, per il Lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned}
2\int_X g(x)\, d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} g_n(x)d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n(x)d\mu = 2\int_X g(x)\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} - \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu,
\end{aligned}$$

che è equivalente a

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \leq 0,$$

che a sua volta è equivalente al fatto che il limite è zero. □

Esercizio 2.22. Siano $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, funzioni non negative, $f_k \geq 0$ ed $f \geq 0$. Provare che le condizioni

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(x) \geq f(x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

implicano

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|dx = 0.$$

Il teorema della convergenza dominata non descrive in modo preciso (con un se e solo se) quando la convergenza puntuale implica quella in $L^1(X)$. Tale caratterizzazione è data dal Teorema di Lebesgue-Vitali e la nozione chiave è quella di *uniforme integrabilità*.

Definizione 2.23. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Una famiglia di funzioni $\mathscr{F} \subset L^1(X)$ si dice uniformemente integrabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{f\in\mathscr{F}} \int_A |f(x)|d\mu < \varepsilon$$

per ogni insieme $A \subset X$ misurabile.

Teorema 2.24 (Lebesgue-Vitali). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f_n \in L^1(X)$, $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che $f_n(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(A) $f \in L^1(X)$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu = 0$;

(B) Valgono le due affermazioni:
  - (i) La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente integrabile.
  - (ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\mu(X_\varepsilon) < \infty$ e

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X\setminus X_\varepsilon} |f_n(x)|d\mu \leq \varepsilon.$$

Dim. $A) \Rightarrow B)$. Proviamo la (i). Dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \leq \varepsilon, \text{ per ogni } n > \bar{n}.$$

Per l'assolutà continuità dell'integrale esistono $\delta_0, \delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, \bar{n}$, tali che

$$\mu(A) \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \int_A |f(x)|d\mu \leq \varepsilon, \quad \mu(A) \leq \delta_k \quad \Rightarrow \quad \int_A |f_k(x)|d\mu \leq \varepsilon.$$

Scegliamo $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\bar{n}}\}$. Ora, per $n > \bar{n}$ si ha

$$\int_A |f_n(x)|d\mu \leq \int_A |f_n(x) - f(x)|d\mu + \int_A |f(x)|d\mu \leq 2\varepsilon$$

non appena $\mu(A) \leq \delta$. Con questo la (i) è provata.

Passiamo alla (ii). Fissato $\varepsilon > 0$, per $t > 0$ consideriamo l'insieme $A_{0,t} = \{x \in X : |f(x)| \geq t\}$. Allora

$$\mu(A_{0,t}) = \int_{A_{0,t}} d\mu \leq \frac{1}{t} \int_X |f(x)|d\mu < \infty,$$

e inoltre, essendo $|f| \in L^1(X)$, dal teorema della convergenza monotona deriva che

$$\lim_{t\to 0} \int_{X \setminus A_{0,t}} |f(x)| d\mu = 0,$$

e quindi esiste $t_0 > 0$ tale che

$$\int_{X \setminus A_{0,t_0}} |f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Per ipotesi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon, \text{ per ogni } n > \bar{n}.$$

Per $k = 1, \dots, \bar{n}$ si considerano gli insiemi $A_{k,t} = \{x \in X : |f_k(x)| \geq t\}$. Per l'argomento precedente questi insiemi hanno misura finita e inoltre esistono $t_k > 0$ tali che

$$\int_{X \setminus A_{k,t_k}} |f_k(x)| d\mu \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, \bar{n}.$$

A questo punto si definisce $X_\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{\bar{n}} A_{k,t_k}$. Risulta $\mu(X_\varepsilon) < \infty$ e inoltre

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_k(x)| d\mu \leq \int_{X \setminus A_{k,t_k}} |f_k(x)| d\mu \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, \bar{n}.$$

D'altra parte, per $n > \bar{n}$ si ha

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \leq \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f(x)| d\mu \leq 2\varepsilon.$$

Con questo anche la (ii) è provata.

$B) \Rightarrow A)$. Mostriamo preliminarmente che (i) e (ii) valgono anche per la funzione f. Ad esempio, usando il Lemma di Fatou

$$\int_{X \setminus X_\varepsilon} |f(x)| d\mu = \int_{X \setminus X_\varepsilon} \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)| d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Analogamente si prova l'estensione della (ii).

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Esiste $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\mu(X_\varepsilon) < \infty$ e

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Inoltre esiste $\delta > 0$ tale che, se $\mu(A) < \delta$ allora

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Per il teorema di Egorov esiste un insieme $Y_\varepsilon \subset X_\varepsilon$ tale che $\mu(X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon) < \delta$ ed $f_n \to f$ uniformemente su Y_ε. Ora si può scomporre l'integrale da stimare in questo modo

$$\int_X |f_n(x)-f(x)| d\mu = \int_{X \setminus X_\varepsilon} |f_n(x)-f(x)| d\mu + \int_{X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon} |f_n(x)-f(x)| d\mu + \int_{Y_\varepsilon} |f_n(x)-f(x)| d\mu.$$

Grazie alla convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \bar{n}$ si ha

$$\int_{Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Per la scelta di Y_ε, per l'ipotesi (i) si ha

$$\int_{X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon$$

uniformemente per $n \in \mathbb{N}$. In conclusione si ottiene

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \le 3\varepsilon, \qquad \text{per ogni } n > \bar{n}.$$

Segue immediatamente che $f \in L^1(X)$. Il teorema è così interamente provato. $\square$

ESEMPIO 2.25. Sia $X = (0,1)$ con la misura di Lebesgue. La successione di funzioni $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{se } 1/n \le x < 1, \end{cases}$$

converge a 0 in ogni punto $x \in (0,1)$ ed inoltre

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)| dx = 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Non vale dunque la tesi del teorema della convergenza dominata. La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può avere una maggiorante integrabile.

Nell'ottica del Teorema di Lebesgue-Vitali, la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non verifica l'ipotesi di uniforme integrabilità.

ESEMPIO 2.26. Sia $X = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue. La successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

converge a 0 in ogni punto ed inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Non vale dunque la tesi del teorema della convergenza dominata e la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può avere una maggiorante integrabile.

A differenza dell'esempio precedente, la successione è uniformemente integrabile. Tuttavia non verifica la condizione (ii) nel Teorema di Lebesgue-Vitali.

ESERCIZIO 2.27. Derivare il Teorema della convergenza dominata dal Teorema di Lebesgue-Vitali.

7. Derivata sotto il segno di integrale

Usiamo il teorema della convergenza dominata per provare un teorema di derivazione sotto segno di integrale.

TEOREMA 2.28. *Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \times \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ una funzione con queste proprietà:*

i) *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $x \mapsto f(x,t)$ è integrabile.*
ii) *Per quasi ogni $x \in X$ la funzione $t \mapsto f(x,t)$ è derivabile.*

iii) Fissato $t_0 \in \mathbb{R}$ esistono $\delta > 0$ e $g \in L^1(X)$ tali che

$$\Big|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\Big| \le g(x)$$

per ogni $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ e per q.o. $x \in X$.

Allora la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_X f(x,t)d\mu$$

è derivabile nel punto t_0 e risulta

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t} d\mu.$$

Dim. Osserviamo preliminarmente che per il punto iii) si ha

$$\frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t} \in L^1(X).$$

La misurabilità della funzione segue dal fatto di essere limite di funzioni misurabili (i rapporti incrementali).

Per la caratterizzazione sequenziale del limite è sufficiente verificare che per ogni successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a t_0 si può portare il limite del rapporto incrementale dentro l'integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0} d\mu. \tag{2.3}$$

Per il Teorema di Lagrange, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $t_n \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ e per μ-q.o. $x \in X$ esiste $\tau_n(x) \in (t_0, t_n)$ tale che

$$g_n(x) = \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0} = \frac{\partial f(x,\tau_n(x))}{\partial t},$$

e di conseguenza $|g_n(x)| \le g(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande e per μ-q.o. $x \in X$. Siamo dunque nelle ipotesi del Teorema della convergenza dominata, che giustifica il passaggio al limite (2.3). □

8. Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

In questa sezione proviamo che una funzione è Riemann-integrabile precisamente quando l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Lebesgue nulla. Poi proviamo che tutte le funzioni Riemann-integrabili sono Lebesgue integrabili e che i due integrali coincidono.

Ricordiamo che l'oscillazione di una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ su un insieme $I \subset [0,1]$ è definita nel seguente modo

$$\omega(f,I) = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in I\}.$$

Poi, l'oscillazione locale di f nel punto $x \in [0,1]$ è

$$\omega(f,x) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega(f, I_\delta(x)) = \inf_{\delta>0} \omega(f, I_\delta(x)),$$

dove $I_\delta(x) = \{y \in [0,1] : |x-y| < \delta\}$.

Osserviamo che per ogni $t > 0$ l'insieme $E_t = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) < t\}$ è aperto relativamente a $[0,1]$, ovvero il complementare è chiuso, ovvero la funzione $x \mapsto$

$\omega(f,x)$ è superiormente semicontinua. Infatti, se $x \in E_t$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(f, I_\delta(x)) < t$ e quindi per ogni $y \in I_\delta(x)$ esiste un $\delta' > 0$ tale che $I_{\delta'}(y) \subset I_\delta(x)$ e dunque

$$\omega(f,y) \le \omega(f, I_{\delta'}(y)) \le \omega(f, I_\delta(x)) < t.$$

La funzione f è continua nel punto $x \in [0,1]$ se e solo se $\omega(f,x) = 0$, e l'insieme

$$D(f) = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) > 0\}$$

è l'insieme dei punti di discontinuità di f.

Lemma 2.29. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Supponiamo che per ogni $x \in [0,1]$ risulti $\omega(f,x) < \varepsilon$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(f, I) < \varepsilon$ per ogni intervallo $I \subset [0,1]$ con $\mathscr{L}^1(I) < \delta$.

Dim. Per ogni $x \in [0,1]$ esiste $\delta_x > 0$ tale che $\omega(f, I_{\delta_x}(x)) < \varepsilon$. La famiglia di intorni $\{I_{\delta_x/2}(x) : x \in [0,1]\}$ è un ricoprimento aperto di $[0,1]$ dal quale è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $\{I_{\delta_i/2}(x_i) : i = 1,\dots,n\}$, dove $\delta_i = \delta_{x_i}$. Scegliendo $\delta = \min\{\delta_i/2 : i = 1,\dots,n\}$, allora per ogni $x \in [0,1]$ esiste i tale che $I_\delta(x) \subset I_{\delta_i}(x_i)$, e pertanto

$$\omega(f, I_\delta(x)) \le \omega(f, I_{\delta_i}(x_i)) < \varepsilon.$$

□

Teorema 2.30. Una funzione limitata $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è Riemann-integrabile se e solo se $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$.

Dim. Proviamo che se $\mathscr{L}^1(D(f)) > 0$ allora f non è Riemann-integrabile. Siccome

$$D(f) = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^\infty \left\{x \in [0,1] : \omega(f,x) \ge \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^\infty D_k,$$

esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{L}^1(D_k) > 0$.

Sia σ una suddivisione di $[0,1]$ e indentifichiamo σ con la famiglia degli intervalli associati $\sigma = \{I\}$. Indichiamo con $S(f,\sigma)$ e $s(f,\sigma)$ le somme inferiori e superiori di f relative a σ. Allora avremo

$$\begin{aligned} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) &= \sum_{I \in \sigma} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I_i) \ge \sum_{\mathrm{int}(I)\cap D_k \ne \emptyset} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I) \\ &\ge \frac{1}{k} \sum_{\mathrm{int}(I)\cap D_k \ne \emptyset} \mathscr{L}^1(I) \ge \frac{1}{k}\mathscr{L}^1(D_k). \end{aligned}$$

Infatti si ha

$$\mathscr{L}^1(D_k) \le \sum_{\mathrm{int}(I)\cap D_k \ne \emptyset} \mathscr{L}^1(I)$$

e inoltre $\omega(f,I) \ge \omega(f,x) \ge 1/k$ per qualche $x \in \mathrm{int}(I) \cap D_k$. Questo prova la non integrabilità di f.

Proviamo che se $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$ allora f è Riemann-integrabile. Mostreremo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[0,1]$ tale che $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \le \varepsilon$. Come sopra, avremo $D(f) = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$, e siccome $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$ risulta $\mathscr{L}^1(D_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una famiglia al più numerabile $\mathscr{F}_1 = \{I\}$ di intervalli (aperti o, equivalentemente, chiusi) tali che $D_k \subset \bigcup_{I \in \mathscr{F}_1} I$ e

$$\sum_{I \in \mathscr{F}_1} \mathscr{L}^1(I) \leq \varepsilon.$$

L'insieme D_k è un sottoinsieme chiuso di $[0,1]$ e quindi è compatto. Dunque, possiamo supporre che la famiglia $\mathscr{F}_1$ sia finita. Avremo allora

$$[0,1] \setminus \bigcup_{I \in \mathscr{F}_1} \mathrm{int}(I) = \bigcup_{I \in \mathscr{F}_2} I$$

per una famiglia finita $\mathscr{F}_2$ di intervalli chiusi disgiunti. Poichè $\omega(f,x) < 1/k$ per ogni $x \in I$, $I \in \mathscr{F}_2$, dal Lemma 2.29 segue che $\bigcup_{I \in \mathscr{F}_2} I = \bigcup_{I \in \mathscr{F}_3} I$ per una famiglia finita $\mathscr{F}_3$ di intervalli chiusi essenzialmente disgiunti tali che $\omega(f,I) < 1/k$ per ogni $I \in \mathscr{F}_3$. Due intervalli I e J sono essenzialmente disgiunti se $\mathscr{L}^1(I \cap J) = 0$, cioè se si intersecano al più in un punto.

Sia σ la suddivisione di $[0,1]$ univocamente determinata dalla famiglia di intervalli $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_3$. Allora, detto $M = \sup_{[0,1]} |f|$, si trova

$$\begin{aligned}\sum_{I \in \sigma} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I) &= \sum_{I \in \mathscr{F}_1} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I) + \sum_{I \in \mathscr{F}_3} \omega(f,I)\mathscr{L}^1(I) \\ &\leq 2M \sum_{I \in \mathscr{F}_1} \mathscr{L}^1(I) + \frac{1}{k} \leq (2M+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

non appena $k > 1/\varepsilon$. □

Teorema 2.31. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata Riemann-integrabile. Allora f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono.

Dim. Mostriamo che f è una funzione misurabile. Sia $t \in \mathbb{R}$ e proviamo che l'insieme $E_t = \{x \in [0,1] : f(x) < t\}$ è misurabile. Sia $D(f) = \{x \in [0,1] : \omega(f,x) > 0\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f. Per il Teorema 2.30 risulta $\mathscr{L}^1(D(f)) = 0$. Per un esercizio visto in classe segue che f è misurabile.

Sappiamo che se f è Riemann-integrabile, allora anche le parti positiva e negativa $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, $x \in [0,1]$, sono Riemann-integrabili. Quindi non è restrittivo supporre $f \geq 0$. Indichiamo con $S(f)$ l'insieme delle funzioni semplici minoranti di f ed indichiamo con $S([0,1])$ l'insieme delle suddivisioni di $[0,1]$. Allora avremo

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sup_{\sigma \in S([0,1])} \sum_{I \in \sigma} \mathscr{L}^1(I) \inf_I f \leq \sup_{\varphi \in S(f)} \int_{[0,1]} \varphi(x)\,dx = \int_{[0,1]} f(x)\,dx.$$

Infatti, ad ogni suddivisione $\sigma = \{I\}$ di $[0,1]$ corrisponde la funzione semplice $\varphi(x) = \sum_{I \in \sigma} (\inf_I f) \chi_I(x) \in S(f)$.

Proviamo la disuguaglianza opposta. Sia σ una suddivisione di $[0,1]$ e sia $\varphi \in S(f)$ una funzione semplice che minora la funzione f, $0 \leq \varphi \leq f$ su $[0,1]$. Avremo

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in [0,1],$$

dove $c_i \geq 0$, gli insiemi A_i sono misurabili e $\bigcup_{i=1}^n A_i = [0,1]$ con unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \varphi(x)dx &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{[0,1]} \chi_{A_i}(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{I\in\sigma} \int_I \chi_{A_i}(x)dx = \sum_{I\in\sigma} \int_I \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x)dx \\ &\leq \sum_{I\in\sigma} \mathscr{L}^1(I) \sup_{x\in I} f(x).\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varphi \in S(f)$ nell'insieme delle funzioni semplici minoranti e di σ nell'insieme delle suddivisioni di $[0,1]$ segue che

$$\int_{[0,1]} f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx.$$

$\square$

CAPITOLO 3

Misure di Borel

1. Misure di Borel

Sia (X, τ) uno spazio topologico. La σ-algebra di Borel su X è la più piccola σ-algebra contenente τ

$$\mathscr{B}(X) = \bigcap \big\{ \mathscr{A} : \mathscr{A} \ \sigma\text{-algebra contenente } \tau \big\}.$$

Definizione 3.1 (Misura boreliana). Sia (X, τ) uno spazio topologico.

i) Una misura esterna $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ si dice di Borel se gli insiemi di Borel sono μ-misurabili. La restrizione $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0, \infty]$ si dirà misura di Borel.
ii) Una misura esterna $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ si dice di Borel regolare se per ogni insieme $E \subset X$ esiste $B \in \mathscr{B}(X)$ tale che $E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$.

In modo naturale si definiscono poi le funzioni Boreliane.

Definizione 3.2 (Funzione Boreliana). Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice di Borel se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathscr{B}(X)$.

2. La misura di Lebesgue è di Borel regolare

In questa sezione vogliamo studiare alcune proprietà della misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$ su $\mathbb{R}^n$. In particolare, vedremo che gli insiemi aperti sono misurabili e che gli insiemi misurabili possono essere approssimati da sopra con aperti e da dentro con chiusi. Della misura (esterna) di Lebesgue conosciamo già le seguenti proprietà:

i) $\mathscr{L}^n(E) = \mathscr{L}^n(x+E)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ (invarianza per traslazioni). Vedremo che questa proprietà caratterizza la misura di Lebesgue.
ii) $\mathscr{L}^n(\lambda E) = \lambda^n \mathscr{L}^n(E)$ per ogni $\lambda > 0$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ (omogeneità rispetto alle dilatazioni).

Prossimo obiettivo e di vedere che $\mathscr{L}^n$ è una misura di Borel regolare. Premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 3.3. Ogni plurintervallo $I \subset \mathbb{R}^n$ verifica $\text{mis}(I) = \mathscr{L}^n(I)$.

Dim. Poichè I è un ricoprimento Lebesguiano di se stesso si ha $\mathscr{L}^n(I) \leq \text{mis}(I)$. Proviamo la disuguaglianza opposta.

Sia $\{J\}_{J \in \mathscr{J}}$ un ricoprimento di I. Facciamo le seguenti riduzioni:

1) Per la definizione di $\mathscr{L}^n$ come estremo inferiore, possiamo supporre che i plurintervalli $J \in \mathscr{J}$ siano insiemi aperti.
2) Quindi per la compattezza di I possiamo supporre che il ricoprimento sia finito.

3) Siccome la differenza insiemistica di due plurintervalli è un'unione finita di plurintervalli, possiamo supporre che il ricoprimento sia costituito da plurintervalli essenzialmente disgiunti, cioè tali che si intersechino al più sulle frontiere. Sostituendo poi ciascun J con la sua chiusura $\bar{J}$, possiamo anche supporre di avere un ricoprimento finito di plurintervalli chiusi.
4) Sostituendo ciascun J con il plurintervallo $I \cap J$, possiamo supporre di avere una partizione
$$I = \bigcup_{J \in \mathscr{J}} J,$$
con unione finita ed essenzialmente disgiunta.
6) A meno di suddividere ogni plurintervallo in opportuni sottoplurintervalli, possiamo supporre che il ricoprimento sia di tipo prodotto. Spieghiamo questa cosa in dimensione $n = 2$. Intendiamo dire che esistono numeri reali $a_0 < a_1 < \ldots < a_h$ e $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$ tali che i plurintervalli $J \in \mathscr{J}$ sono della forma
$$J = J_{ij} = [a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j],$$
per $i = 1, \ldots, h$ e $j = 1, \ldots, k$.

In definitiva, abbiamo una partizione finita ed essenzialmente disgiunta
$$I = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,h \\ j=1,\ldots,k}} J_{ij}.$$
A questo punto, usando la proprietà distributiva di somma e prodotto si trova
$$\mathrm{mis}(I) = \mathrm{mis}\Big(\bigcup_{\substack{i=1,\ldots,h \\ j=1,\ldots,k}} J_{ij} \Big) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,h \\ j=1,\ldots,k}} \mathrm{mis}(J_{ij}).$$
Questo termina la dimostrazione perchè a partire da un qualsiasi ricoprimento di I ne abbiamo trovato un altro di misura totale minore (non maggiore) che realizza il valore $\mathrm{mis}(I)$. □

Dal lemma precedente segue in particolare che $\mathscr{L}^n$ è una misura esterna finita sugli insiemi compatti. Ora verifichiamo che il test di misurabilità è sufficiente da fare sui plurintervalli.

Lemma 3.4. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile se e solo se per ogni plurintervallo $I \subset \mathbb{R}^n$ si verifica $\mathscr{L}^n(I) = \mathscr{L}^n(I \cap A) + \mathscr{L}^n(I \setminus A)$. In particolare, i plurintervalli sono misurabili.

Dim. Un'implicazione è immediata. Supponiamo che i plurintervalli spezzino la misura di A. Dobbiamo provare che anche ogni altro insieme E verifica $\mathscr{L}^n(E) \geq \mathscr{L}^n(E \cap A) + \mathscr{L}^n(E \setminus A)$. Possiamo supporre $\mathscr{L}^n(E) < \infty$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I\}_{I \in \mathscr{I}}$ di E tale che
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^n(E) + \varepsilon &\geq \sum_{I \in \mathscr{I}} \mathrm{mis}(I) = \sum_{I \in \mathscr{I}} \mathscr{L}^n(I) = \sum_{I \in \mathscr{I}} \mathscr{L}^n(I \cap A) + \mathscr{L}^n(I \setminus A) \\
&\geq \mathscr{L}^n\Big(\bigcup_{I \in \mathscr{I}} I \cap A \Big) + \mathscr{L}^n\Big(\bigcup_{I \in \mathscr{I}} I \setminus A \Big) \\
&\geq \mathscr{L}^n(E \cap A) + \mathscr{L}^n(E \setminus A),
\end{aligned}$$

e la tesi segue.

□

Possiamo ora provare che $\mathscr{L}^n$ è una misura di Borel. Vedremo che questo risultato segue anche da un teorema generale, il Teorema 3.11.

PROPOSIZIONE 3.5. Gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ sono $\mathscr{L}^n$-misurabili.

DIM. Infatti, un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è un'unione al più numerabile di plurintervalli.

□

Ora proviamo il teorema di approssimazione per insiemi misurabili.

TEOREMA 3.6. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ contenente E ed un chiuso $C \subset E$ tali che $\mathscr{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

DIM. Supponiamo preliminarmente che $\mathscr{L}^n(E) < \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ di E tale che

$$\mathscr{L}^n(E) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(I_k).$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un plurintervallo *aperto* J_k contenente I_k tale che $\mathscr{L}^n(J_k \setminus I_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. L'insieme

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

è aperto in quanto unione di aperti, e inoltre

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(J_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(I_k) + \mathscr{L}^n(J_k \setminus I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathscr{L}^n(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big) \\ &\leq \mathscr{L}^n(E) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Essendo E misurabile si ha $\mathscr{L}^n(A) = \mathscr{L}^n((A \setminus E) \cup E) = \mathscr{L}^n(A \setminus E) + \mathscr{L}^n(E)$. Dunque, per differenza si trova

$$\mathscr{L}^n(A \setminus E) \leq \varepsilon.$$

Togliamo l'ipotesi che E abbia misura finita. Detta $B_1 = B(0,1)$ la palla di raggio 1 centrata in 0 e posto $B_k = B(0,k) \setminus B(0,k-1)$, si ha

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Poichè ogni E_k ha misura finita, per la prima parte della dimostrazione per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un aperto A_k contenente E_k e tale che

$$\mathscr{L}^n(A_k \setminus E_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

L'insieme $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è aperto ed inoltre

$$\mathscr{L}^n(A \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k \setminus E_k) \leq \varepsilon.$$

Passiamo alla costruzione del chiuso. Poichè E è misurabile anche il complementare $E' = \mathbb{R}^n \setminus E$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile. Dunque, esiste un insieme aperto A_1 che contiene E' e tale che $\mathscr{L}^n(A_1 \setminus E') \leq \varepsilon$. L'insieme $C = A_1' = \mathbb{R}^n \setminus A_1$ è chiuso ed è contenuto in E. Inoltre si ha

$$\mathscr{L}^n(E \setminus C) = \mathscr{L}^n(E \cap C') = \mathscr{L}^n(A_1 \setminus E') \leq \varepsilon.$$

In conclusione, si ottiene la stima desiderata

$$\mathscr{L}^n(A \setminus C) = \mathscr{L}^n\big((A \setminus E) \cup (E \setminus C)\big) \leq \mathscr{L}^n(A \setminus E) + \mathscr{L}^n(E \setminus C) \leq 2\varepsilon.$$

□

Osservazione 3.7. Anche togliendo l'ipotesi che E sia misurabile, possiamo comunque dire che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un aperto A_k contenente E e tale che $\mathscr{L}^n(A_k) \leq \mathscr{L}^n(E) + 1/k$. L'insieme

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

è un Boreliano che contiene E ed inoltre $\mathscr{L}^n(B) = \mathscr{L}^n(E)$. Dunque, $\mathscr{L}^n$ è una misura di Borel regolare.

Definizione 3.8 (Insiemi G_δ). Un insieme $G \subset \mathbb{R}^n$ si dice G_δ, e scriveremo $G \in G_\delta(\mathbb{R}^n)$, se esiste una successione di insiemi aperti $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Il Teorema 3.6 ha la seguente conseguenza.

Corollario 3.9. Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile se e solo se esistono $G \in G_\delta(\mathbb{R}^n)$ e un insieme N di misura di Lebesgue nulla tali che $E = G \setminus N$.

Dim. Se E è misurabile, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme aperto A_k contenente A tale che $\mathscr{L}^n(A_k \setminus E) \leq \frac{1}{k}$. L'insieme $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ è G_δ ed inoltre, posto $N = G \setminus E$ si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{L}^n(N) \leq \mathscr{L}^n(A_k \setminus E) \leq \frac{1}{k},$$

e dunque $\mathscr{L}^n(N) = 0$.

Viceversa, se $E = G \setminus N$ come nelle ipotesi, allora E è misurabile in quanto differenza di insiemi misurabili. □

3. Le misure metriche sono boreliane

In questa sezione consideriamo uno spazio metrico (X, d).

Definizione 3.10 (Misura metrica). Diciamo che una misura esterna $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ è una misura metrica se per ogni coppia di insiemi $A, B \subset X$ si ha

$$\operatorname{dist}(A, B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

In altri termini, una misura esterna è metrica se è addittiva sulle unioni di insiemi "staccati". Vogliamo provare il seguente teorema.

Teorema 3.11. Siano (X, d) uno spazio metrico e μ una misura metrica su X. Allora μ è una misura di Borel.

Per farlo partiamo dal seguente lemma.

Lemma 3.12. Sia μ una misura metrica su X. Sia $E_k \subset E_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, una successione crescente di insiemi di X e sia $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Se $\mathrm{dist}(E \setminus E_{k+1}, E_k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \mu(E).$$

Dim. Per monotonia, il seguente limite esiste

$$L = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k),$$

e dal momento che $E_k \subset E$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $L \leq \mu(E)$. È dunque sufficiente mostrare che $L \geq \mu(E)$ e non è restrittivo supporre $L < \infty$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mu(E) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\Big) \leq \mu(E_k) + \sum_{j=k}^\infty \mu(E_{j+1} \setminus E_j),$$

e dunque il risultato segue se si mostra che converge la seguente serie

$$\sum_{j=1}^\infty \mu(E_{j+1} \setminus E_j) < \infty.$$

Sia $F_j = E_{j+1} \setminus E_j$ e osserviamo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{j=1}^{2m} \mu(F_j) = \sum_{j=1}^m \mu(F_{2j}) + \sum_{j=1}^m \mu(F_{2j-1}).$$

Ora osserviamo che

$$\mathrm{dist}(F_{2j}, F_{2j-2}) = \mathrm{dist}(E_{2j+1} \setminus E_{2j}, E_{2j-1} \setminus E_{2j-2}) \geq \mathrm{dist}(E \setminus E_{2j}, E_{2j-1}) > 0,$$

e analogamente per gli insiemi con indice dispari. Possiamo dunque passare dalla somma delle misure alla misura dell'unione:

$$\sum_{j=1}^{2m} \mu(F_j) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^m F_{2j}\Big) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^m F_{2j-1}\Big) \leq \mu(E_{2m}) + \mu(E_{2m-1}) \leq 2L$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$. Questo prova che la serie converge e il lemma è dimostrato. □

Dimostrazione del Teorema 3.11. Dobbiamo dimostrare che ogni insieme $A \subset X$ aperto è μ-misurabile, e cioè che per ogni $E \subset X$ si ha

$$\mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A'). \tag{3.1}$$

L'altra disuguaglianza è sempre vera.

Per $k \in \mathbb{N}$ consideriamo gli insiemi

$$A_k = \Big\{x \in A : \mathrm{dist}(x, A') > \frac{1}{k}\Big\}.$$

Possiamo supporre che $A' \neq \emptyset$, altrimenti $A = X$ e non ci sarebbe nulla da provare. Poichè si ha $\mathrm{dist}(E \cap A_k, E \cap A') > 0$, la misura esterna μ è addittiva per tale coppia di insiemi

$$\mu(E \cap A_k) + \mu(E \cap A') = \mu((E \cap A_k) \cup (E \cap A')) \leq \mu(E).$$

Se proviamo che

$$\lim_{k \to \infty} \mu(E \cap A_k) = \mu(E \cap A) \tag{3.2}$$

la tesi (3.1) segue.

Consideriamo la successione di insiemi $E_k = E \cap A_k$, $k \in \mathbb{N}$. Si tratta di una successione crescente ed inoltre

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E \cap A.$$

Nell'ultima uguaglianza di insiemi abbiamo usato il fatto che A è aperto. Vogliamo dedurre la validità di (3.2) dal Lemma 3.12. Osserviamo che, essendo $E \cap A \setminus E_{k+1} \subset A \setminus A_{k+1}$ e $E_k \subset A_k$, si ha

$$\mathrm{dist}((E \cap A) \setminus E_{k+1}, E_k) \geq \mathrm{dist}(A \setminus A_{k+1}, A_k) \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque, le ipotesi del lemma sono verificate e la (3.2) segue. □

Usiamo il Teorema 3.11 per provare che le misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$ sono di Borel.

Teorema 3.13. Per ogni $s \geq 0$, la misura di Hausdorff s-dimensionale $\mathscr{H}^s$ su $\mathbb{R}^n$ è di Borel.

Dim. Proviamo che $\mathscr{H}^s$ è una misura metrica su $\mathbb{R}^n$. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi staccati, $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, e proviamo che

$$\mathscr{H}^s(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B).$$

L'altra disuguaglianza è sempre verificata. È sufficiente provare che $\mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B)$ per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo. Non è restrittivo supporre che sia $\mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) < \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia di insiemi $E_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, tali che

$$\mathrm{diam}(E_k) < \delta, \quad A \cup B \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k, \quad \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s < \mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon.$$

Se $0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)$, ogni insieme E_k non può intersecare contemporaneamente sia A che B. Dunque gli insiemi $\mathbb{N}_A = \{k \in \mathbb{N} : E_k \cap A \neq \emptyset\}$ ed $\mathbb{N}_B = \{k \in \mathbb{N} : E_k \cap B \neq \emptyset\}$ sono disgiunti e pertanto

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B) &\leq \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}_A} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s + \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}_B} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s \\ &\leq \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\Big)^s \leq \mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ora, per $\delta \to 0^+$ si trova $\mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B) \leq \mathscr{H}^s(A \cup B) + \varepsilon$, e data l'arbitrarietà di ε si ottiene la tesi. □

OSSERVAZIONE 3.14. Nella definizione di misura di Lebesgue i plurintervalli possono essere presi di diametro piccolo a piacere. Dunque, la dimostrazione del teorema precedente si adatta anche ad $\mathscr{L}^n$, che dunque è una misura di Borel, come abbiamo già visto.

4. Insiemi non misurabili ed insiemi misurabili non Boreliani

4.1. Insieme non misurabile di Vitali. Assumendo la validità dell'Assioma di scelta è possibile "costruire" (dimostrare che esistono) insiemi in $\mathbb{R}$ che non sono $\mathscr{L}^1$-misurabili.

Consideriamo l'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e introduciamo la relazione di equivalenza $\sim$ su $[0,1]$ dicendo che $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. L'intervallo $[0,1]$ viene suddiviso nell'unione disgiunta delle classi di equivalenza della relazione $\sim$, che indicheremo con $[x] = \{y \in [0,1] : y \sim x\}$.

Utilizziamo l'assioma di scelta per selezionare da ogni classe di equivalenza $[x]$ un elemento $y \in [x]$. Definiamo l'insieme $V \subset [0,1]$ come l'unione di questi rappresentanti.

Per ogni numero razionale $q \in Q = [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $\tau_q(x) = q + x$. Osserviamo che $q \neq q'$ implica che $\tau_q(V) \cap \tau_{q'}(V) = \emptyset$, in quanto V contiene elementi che stanno in classi di equivalenza distinte. Inoltre, essendo ogni $x \in [0,1]$ in una delle classi di equivalenza, si ha

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in Q} \tau_q(V) \subset [-1,2].$$

Dalle inclusioni precedenti segue che

$$1 \leq \mathscr{L}^1\Big(\bigcup_{q \in Q} \tau_q(V)\Big) \leq 3. \tag{3.3}$$

Per l'invarianza di $\mathscr{L}^1$ rispetto alle traslazioni si ha $\mathscr{L}^1(V) = \mathscr{L}^1(\tau_q(V))$ per ogni $q \in Q$. Supponiamo ora per assurdo che V sia $\mathscr{L}^1$- misurabile. Se fosse $\mathscr{L}^1(V) = 0$, si avrebbe

$$\mathscr{L}^1\Big(\bigcup_{q \in Q} \tau_q(V)\Big) = \sum_{q \in Q} \mathscr{L}^1(\tau_q(V)) = \sum_{q \in Q} \mathscr{L}^1(V) = 0.$$

Se invece fosse $\mathscr{L}^1(V) > 0$, allora

$$\mathscr{L}^1\Big(\bigcup_{q \in Q} \tau_q(V)\Big) = \infty.$$

In entrambi i casi si contraddice la (3.3).

4.2. Insieme di Cantor. In questa sezione costruiamo l'insieme di Cantor $K \subset [0,1]$. Si tratta di un insieme compatto con interno vuoto, di cardinalità più che numerabile, di misura di Lebesgue nulla. L'insieme K è l'esempio più semplice di insieme frattale autosimilare. È possibile provare che K ha dimensione di Hausdorff pari a $\log 2/\log 3$.

4.2.1. *Costruzione.* Consideriamo le due trasformazioni $T_1, T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$T_1(x) = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad T_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sia T_1 che T_2 sono due contrazioni con fattore di contrazione $1/3$. Definiamo $K_0 = [0,1]$ e sia

$$K_1 = T_1(K_0) \cup T_2(K_0) = [0,1/3] \cup [2/3,1] \subset K_0.$$

Completiamo la costruzione per induzione. Per $n \in \mathbb{N}$, siano $K_{n-1} \subset K_{n-2} \subset \ldots \subset K_1 \subset K_0$ già definiti e poniamo

$$K_n = T_1(K_{n-1}) \cup T_2(K_{n-1}) \subset K_{n-1}.$$

L'insieme K_n è formato da 2^n intervalli compatti disgiunti di lunghezza $1/3^n$, detti intervalli della generazione n-esima:

$$K_n = I_n^1 \cup I_n^2 \cup \ldots \cup I_n^{2^n},$$

dove chiaramente $I_n^1 = [0, 1/3^n]$ e $I_n^{2^n} = [1 - 1/3^n, 1]$. Gli intervalli sono ordinati in modo naturale.

Siccome gli insiemi K_n sono compatti e la successione $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, l'intersezione

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset [0,1]$$

è un insieme compatto non vuoto, detto insieme di Cantor.

Proviamo che K ha interno vuoto. Siano $x, y \in K$, $x \neq y$, e sia $n \in \mathbb{N}$ il più grande intero tale che esiste $i = 1, \ldots, 2^n$ per cui $x, y \in I_n^i$. Questo intero massimo esiste, perchè la lunghezza degli intervalli della generazione n-esima tende a 0 con n e dunque è definitivamente minore di $|x - y|$. L'intervallo I_n^i si suddivide in tre intervalli consecutivi essenzialmente disgiunti di lunghezza $1/3^{n+1}$:

$$I_n^i = I_{n+1}^j \cup \Big(\frac{k}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\Big) \cup I_{n+1}^{j+1},$$

per opportuni interi j, k, dove $\big(k/3^{n+1}, (k+1)/3^{n+1}\big) \cap K = \emptyset$. Per la massimalità di n deve essere $x \in I_{n+1}^j$ e $y \in I_{n+1}^{j+1}$, o viceversa. Dunque, fra ogni coppia di punti di K c'è un punto fuori da K.

Proviamo che $\mathscr{L}^1(K) = 0$. Gli intervalli della generazione n-esima formano un ricoprimento Lebesguiano di K. Dunque, si ha

$$\mathscr{L}^1(K) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \mathscr{L}^1(I_n^i) \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^n,$$

e con $n \to \infty$ si deduce che $\mathscr{L}^1(K) = 0$.

4.2.2. *Interpretazione aritmetica.* Nella rappresentazione ternaria, ogni numero reale $x \in [0,1]$ si scrive nella forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

dove le cifre verificano $a_n \in \{0,1,2\}$. Si può verificare che K è l'insieme dei numeri reali $x \in [0,1]$ tali che $a_n \in \{0,2\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.2.3. *Interpretazione metrica (K come punto fisso).* Consideriamo l'insieme di tutti i compatti non vuoti di $\mathbb{R}$

$$\mathscr{K} = \big\{ K \subset \mathbb{R} : \ K \text{ compatto non vuoto } \big\}.$$

A questo insieme è possibile dare una struttura di spazio metrico completo con la distanza di Hausdorff

$$\delta_H(K,H) = \inf\big\{\varepsilon > 0 : K \subset H_\varepsilon \text{ e } H \subset K_\varepsilon\big\},$$

dove $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x,K) < \varepsilon\}$.

Sia $T : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ la trasformazione

$$T(K) = T_1(K) \cup T_2(K).$$

Questa trasformazione è una contrazione di fattore $1/3$ in questo spazio metrico. Per il Teorema di punto fisso di Banach T ha un unico punto fisso $K = T(K)$, che è precisamente l'insieme di Cantor. In questo senso, K è un insieme autosimilare.

4.3. Funzione di Vitali-Cantor. Insiemi $\mathscr{L}^1$-misurabili non boreliani.

4.3.1. *Scala del diavolo.* Sia $K \subset [0,1]$ l'insieme di Cantor. Costruiamo una funzione $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ che verifica le seguenti proprietà:

i) φ è continua e crescente (non strettamente).
ii) φ è derivabile in ogni punto $x \in [0,1] \setminus K$ ed inoltre $\varphi'(x) = 0$. In particolare, φ è derivabile con derivata nulla in $\mathscr{L}^1$-q.o. ogni punto in $[0,1]$.
iii) $\varphi : K \to [0,1]$ è suriettiva. In particolare, K ha la potenza del continuo.

Questa funzione è nota come scala del diavolo o funzione di Vitali-Cantor.

Costruiamo per induzione una successione di funzioni $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su $[0,1]$ a partire dalla funzione $\varphi_0(x) = x$. Per $n = 1$, $\varphi_1 : [0,1] \to [0,1]$ è definita nel seguente modo:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x = \dfrac{1}{2}\varphi_0(3x) & x \in [0,1/3] \\ \dfrac{1}{2} & x \in (1/3,2/3) \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\Big(x - \dfrac{2}{3}\Big) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\varphi_0(3x-2) & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

Data $\varphi_{n-1} : [0,1] \to [0,1]$, definiamo $\varphi_n : [0,1] \to [0,1]$ nel seguente modo:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi_{n-1}(3x) & x \in [0,1/3] \\ \dfrac{1}{2} = \varphi_{n-1}(x) & x \in (1/3,2/3) \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\varphi_{n-1}(3x-2) & x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Ogni funzione φ_n è continua e crescente. Dalla costruzione si deduce che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \le \frac{1}{2^{\min\{n,m\}}},$$

e dunque la successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy. Dunque il suo limite, la funzione $\varphi : [0,1] \to [0,1]$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x), \quad x \in [0,1],$$

è continua e crescente. Questa è la funzione di Vitali-Cantor.

L'insieme $A = [0,1]\setminus K$ è aperto e la funzione φ è costante su ciascuna componente connessa di A. Dunque, φ è derivabile su A con $\varphi'(x) = 0$ per ogni $x \in A$. L'insieme di non derivabilità è contenuto in K (coincide con K) che ha misura nulla.

Proviamo che la funzione $\varphi : K \to [0,1]$ è suriettiva. Dato $y \in [0,1]$, per il Teorema dei valori intermedi esiste $x \in [0,1]$ tale che $\varphi(x) = y$. Se $x \in K$ abbiamo finito. Se invece $x \in [0,1] \setminus K$, sia $J = (a,b)$ la componente connessa di $[0,1] \setminus K$ contenente x. Allora $\varphi(a) = \varphi(x) = \varphi(b)$ con $a, b \in K$.

4.3.2. *Insieme misurabile non Boreliano.* Ora usiamo la funzione di Vitali-Cantor per costruire un insieme $\mathscr{L}^1$-misurabile non Boreliano. Partiamo dal seguente lemma.

LEMMA 3.1. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. La famiglia di insiemi

$$\mathscr{E} = \{E \subset \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \mathscr{A}\}$$

è una σ-algebra su $\mathbb{R}$ e inoltre $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{E}$.

DIM. In primo luogo si ha $X = f^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathscr{A}$ e $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathscr{A}$. Inoltre, se $E \in \mathscr{E}$ allora $f^{-1}(E') = f^{-1}(E)' \in \mathscr{A}$, e dunque $E' \in \mathscr{E}$. Infine, supponiamo che sia $E_j \in \mathscr{E}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e proviamo che $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \mathscr{E}$. È sufficiente osservare che

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\Big) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_j) \in \mathscr{A}.$$

Quindi $\mathscr{E}$ è una σ-algebra.

Sia ora $A \subset \mathbb{R}$ un insieme aperto. Dal momento che f è misurabile risulta $f^{-1}(A) \in \mathscr{A}$ e dunque $A \in \mathscr{E}$. Questo prova che la σ-algebra dei boreliani $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ è contenuta in $\mathscr{E}$. □

Sia $K \subset [0,1]$ l'insieme di Cantor e sia $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ la funzione di Cantor-Vitali. Definiamo la funzione $\psi : [0,1] \to [0,1]$ nel seguente modo:

$$\psi(y) = \inf\{x \in [0,1] : \varphi(x) = y\}.$$

Siccome la funzione φ è continua l'inf è un minimo e si ha $\varphi(\psi(y)) = y$. Elenchiamo alcune proprietà di ψ:

i) Si ha $\psi(y) \in K$ per ogni $y \in [0,1]$. Infatti, se fosse $\psi(y) \in [0,1] \setminus K$, detta $(a,b) \subset [0,1] \setminus K$ la componente connessa di $\psi(y)$, si avrebbe $a < \psi(y) < b$ con $\varphi(a) = \varphi(\psi(y)) = y$, contro la definizione di ψ.

ii) La funzione ψ è crescente, essendo φ crescente. In effetti, ψ è strettamente crescente (provare) e quindi iniettiva.

iii) La funzione $\psi : [0,1] \to [0,1]$ è una funzione Boreliana, ovvero gli insiemi $\psi^{-1}(\{x \in [0,1] : x < \alpha\}$ sono Boreliani per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Infatti questi insiemi sono intervalli. In particolare, ψ è misurabile (rispetto alla misura di Lebesgue).

Per il lemma precedente, la famiglia di insiemi

$$\mathscr{E} = \big\{E \subset [0,1] : \psi^{-1}(E) \text{ è } \mathscr{L}^1\text{-misurabile}\big\}$$

è una σ-algebra che contiene i Boreliani di $[0,1]$.

Per costruire un insieme $E \subset [0,1]$ che è $\mathscr{L}^1$-misurable ma non è di Borel, procediamo nel seguente modo. Sia $V \subset [0,1]$ un insieme non $\mathscr{L}^1$-misurabile, ad esempio l'insieme di Vitali, e consideriamo l'insieme $E = \psi(V)$. Per quanto visto sopra si ha $E \subset K$ e dunque, per la completezza della misura di Lebesgue e per il fatto che $\mathscr{L}^1(K) = 0$, l'insieme E è $\mathscr{L}^1$-misurabile, essendo $\mathscr{L}^1(E) = 0$.

Tuttavia, E non è Boreliano. Se infatti fosse Boreliano allora dovrebbe essere $E \in \mathscr{E}$, ovvero l'insieme $V = \psi^{-1}(E)$ dovrebbe essere $\mathscr{L}^1$-misurabile, ma questo non è vero.

CAPITOLO 4

Spazi di funzioni integrabili

1. Spazi L^p. Disuguaglianze di Hölder e Minkowski

Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e indichiamo con $\mathscr{M}(X)$ lo spazio vettoriale (reale) delle funzioni $f : X \to [-\infty, \infty]$ che sono μ-misurabili ed $f(x) \in \mathbb{R}$ per μ-q.o. $x \in X$.

Per $1 \le p < \infty$, si definisce l'insieme di funzioni

$$L^p(X) = \Big\{ f \in \mathscr{M}(X) : \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \Big\}. \tag{4.1}$$

Vedremo che si tratta di uno spazio vettoriale reale. È ben definita la funzione $\| \cdot \|_p : L^p(X) \to [0, \infty)$

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f(x)|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.2}$$

Quando $p = 2$ questa seminorma nasce da un prodotto scalare. Date $f, g \in L^2$ si definisce

$$\langle f, g \rangle_{L^2(X)} = \int_X f(x) g(x)\, d\mu.$$

Vedremo fra breve che l'integrale converge.

Estendiamo la definizione al caso $p = \infty$. L'estremo superiore essenziale di una funzione $f \in \mathscr{M}(X)$ è

$$\|f\|_\infty = \inf \big\{ M \ge 0 : |f(x)| \le M \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X \big\}.$$

Se l'insieme di cui si prende l'estremo inferiore è vuoto, si pone $\|f\|_\infty = \infty$. Possiamo dunque definire l'insieme delle funzioni essenzialmente limitate

$$L^\infty(X) = \big\{ f \in \mathscr{M}(X) : \|f\|_\infty < \infty \big\}. \tag{4.3}$$

Diciamo che due esponenti $1 \le p, q \le \infty$ sono Hölder-coniugati se si ha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

dove usiamo le convenzioni $1/\infty = 0$ e $1/0 = \infty$. L'esponente $p = 2$ coincide col suo coniugato.

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Hölder). Siano $1 \le p, q \le \infty$ esponenti di Hölder coniugati. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ allora $fg \in L^1(X)$ e

$$\int_X |f(x) g(x)|\, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.4}$$

Inoltre, nel caso $1 < p, q < \infty$, se si ha uguaglianza e $\|f\|_p \ne 0$, allora esiste $\lambda > 0$ tale che $|g(x)| = \lambda |f(x)|^{p-1}$ per μ-q.o. $x \in X$.

Dim. Il caso limite $p = 1$ e $q = \infty$ è chiaro, perchè

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f(x)|\, d\mu.$$

Se c'è uguaglianza dovra essere $|g(x)| = \|g\|_\infty$ per μ-q.o. $x \in \{|f| > 0\}$.

Passiamo al caso $1 < p < \infty$ e quindi $q = \frac{p}{p-1}$. Ricordiamo la disuguaglianza di Young. Se $x, y \geq 0$ sono numeri reali, allora

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{4.5}$$

Dividendo per $y^q \neq 0$, e ponendo $t = x/y^{\frac{1}{p-1}} \geq 0$ si ottiene la disuguaglianza equivalente

$$t \leq \frac{t^p}{p} + 1 - \frac{1}{p}, \quad t \geq 0,$$

la cui validità può essere verificata facilmente con uno studio di funzione. Si ha uguaglianza se e solo se $t = 1$, e quindi in (4.5) si ha uguaglianza se e solo se $y = x^{p-1}$.

Passando alla disuguaglianza di Hölder, usando la disuguaglianza di Young puntualmente dentro l'integrale si trova

$$\begin{aligned}
\int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q}\, d\mu &\leq \int_X \Big(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}\Big) d\mu \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_q^q} \int_X |g|^q d\mu \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,
\end{aligned}$$

e quindi si ottiene la (4.4). Se si ha uguaglianza in (4.4), allora deve esserci uguaglianza q.o. nella disuguaglianza dentro l'integrale. Quindi deve essere

$$\frac{|g|}{\|g\|_q} = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}, \quad \mu\text{-q.o. su } X.$$

Questo termina la dimostrazione. Abbiamo usato l'ipotesi $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ per poter dividere per le norme di f e g all'inizio dell'argomento. □

Proposizione 4.2 (Disuguaglianza di Minkowski). *Per ogni $1 \leq p \leq \infty$ e per ogni $f, g \in L^p(X)$ si ha*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.6}$$

Dim. Il caso $p = \infty$ è elementare e la verifica è lasciata come esercizio.

Ricordiamo innanzi tutto che per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante $C_p > 0$ tale che per ogni coppia di numeri reali $x, y \geq 0$ si ha

$$(x + y)^p \leq C_p(x^p + y^p). \tag{4.7}$$

Da tale disuguaglianza segue che $f + g \in L^p(X)$.

Sia ora $1 < q \le \infty$ l'esponende di Hölder coniugato di p. Usando la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|^{p-1}|f+g| d\mu \\ &\le \int_X |f+g|^{p-1}|f| d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g| d\mu \\ &\le \||f+g|^{p-1}\|_q (\|f\|_p + \|g\|_p).\end{aligned}$$

Ora dividiamo a destra e a sinistra per $\||f+g|^{p-1}\|_q = \|f+g\|_p^{p-1}$. Lo possiamo fare perchè questa quantità è finita e possiamo anche supporla diversa da zero. Se fosse $\|f+g\|_p = 0$ non ci sarebbe infatti nulla da dimostrare. Ma $\|f+g\|_p^p \||f+g|^{p-1}\|_q^{-1} = \|f+g\|_p$ e la tesi segue. □

Esempio 4.3. Sia $X = [0,1]$ con la misura di Lebesgue e siano $1 \le p < \infty$ e $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Sia $\{q_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ una enumerazione dei razionali e definiamo la funzione $f : [0,1] \to [0,\infty]$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i |x - q_i|^\alpha}, \quad x \in [0,1].$$

La funzione f è misurabile ed assume il valore ∞ almeno su tutto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Per la disuguaglianza di Minkowski e per il teorema della convergenza monotona, si ha

$$\begin{aligned}\Big(\int_{[0,1]} |f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} &= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{[0,1]} \Big|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i|x-q_i|^\alpha}\Big|^p dx\Big)^{1/p} \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\int_{[0,1]} \frac{1}{2^{ip}|x-q_i|^{\alpha p}}\, dx\Big)^{1/p} \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\Big(\int_{[-1,1]} \frac{1}{|x|^{\alpha p}}\, dx\Big)^{1/p} \\ &\le \Big(\frac{2}{1-\alpha p}\Big)^{1/p} < \infty.\end{aligned}$$

Dunque si ha $f \in L^p([0,1])$ ed in particolare la serie che definisce la funzione f converge ad un valore finito per q.o. $x \in [0,1]$.

2. Inclusioni fra spazi L^p

In questa sezione esaminiamo alcune relazioni di inclusione fra spazi $L^p(X)$.

1. Supponiamo che X sia di misura finita, $\mu(X) < \infty$, e siano $1 \le p < q \le \infty$. Allora $L^q(X) \subset L^p(X)$. Se, infatti, $f \in L^q(X)$, allora

$$\int_X |f|^p d\mu \le \mu(X)^{\frac{1}{(q/p)'}} \Big(\int_X |f|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{(q/p)}} < \infty,$$

dove $(q/p)'$ indica l'esponente di Hölder coniugato di q/p.

2. Se una funzione sta in due diversi spazi di Lebesgue, sta anche in tutti quelli intermedi, independentemente dalla misura di X. Siano $1 \le p < q < \infty$, e supponiamo che $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$, allora $f \in L^r(X)$ per ogni $p < r < q$. Infatti, si ha

$r = tp + (1-t)q$ per un certo $t \in (0,1)$, e dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$\int_X |f|^r d\mu \le \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^t \Big(\int_X |f|^q d\mu\Big)^{1-t} < \infty.$$

3. Se una funzione sta in tutti gli spazi L^p (sufficientemente elevati) con norma uniformemente limitata, allora sta anche in L^∞. Precisamente, supponiamo che $f \in L^p(X)$ con $\|f\|_p \le M < \infty$ per ogni $1 \le p < \infty$. Allora $\|f\|_\infty \le M$.

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e proviamo che l'insieme

$$A_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \ge M + \varepsilon\}$$

ha misura nulla. Infatti

$$\mu(A_\varepsilon) = \int_{A_\varepsilon} d\mu \le \frac{1}{(M+\varepsilon)^p} \int_X |f(x)|^p d\mu \le \Big(\frac{M}{M+\varepsilon}\Big)^p \to 0$$

per $p \to \infty$. Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario segue che $\|f\|_\infty \le M$. $\square$

Esempio 4.4. Sia $X = [0,1]$ con la misura di Lebsgue e si consideri la funzione $f(x) = |\log x|$, $x \in [0,1]$. Per ogni $1 \le p < \infty$ esiste una costante $C_p > 0$ tale che

$$\sqrt{x}|\log x|^p \le C_p, \quad x \in (0,1].$$

Siccome $1/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$ segue che $f \in L^p([0,1])$ per ogni $p \ge 1$. Tuttavia $f \notin L^\infty([0,1])$.

3. Teorema di completezza

Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che $L^p(X)$ è chiuso per somma di funzioni, e dunque è uno spazio vettoriale. Per ogni $1 \le p \le \infty$, la semininorma $\|\cdot\|_p : L^p(X) \to [0,\infty)$ verifica le seguenti proprietà:

i) $\|f\|_p \ge 0$ per ogni $f \in L^p(X)$ ed $\|f\|_p = 0$ implica che $f = 0$ μ-q.o.;
ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in L^p(X)$;
iii) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ per ogni $f, g \in L^p(X)$.

Per avere uno spazio normato (invece che solo seminormato) occorre identificare le funzioni che sono uguali quasi ovunque. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $L^p(X)$

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in X : f(x) \ne g(x)\}) = 0.$$

Indichiamo con $\mathscr{L}^p(X) = L^p(X)/\sim$ il quoziente munito della norma $\|\cdot\|_p$, che non dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza. Ora $(\mathscr{L}^p(X), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato.

Teorema 4.5 (Completezza). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Per ogni $1 \le p \le \infty$, $\mathscr{L}^p(X)$ è uno spazio di Banach. In particolare, $\mathscr{L}^2(X)$ è uno spazio di Hilbert.

Dim. Abbiamo già osservato che $\mathscr{L}^p(X)$ è uno spazio vettoriale normato. Dobbiamo provare che è uno spazio metrico completo per la distanza indotta dalla norma. Vediamo la prova nel caso $1 \le p < \infty$. Scegliamo a nostro piacere rappresentanti nelle classi di equivalenza. Sia $f_n \in L^p(X)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di Cauchy. Esiste una sottosuccessione $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \le \frac{1}{2^i}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. La funzione $g : X \to [-\infty, \infty]$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|, \quad x \in X,$$

è misurabile ed è finita in μ-q.o. punto $x \in X$. Infatti, per la disuguaglianza di Minkowski generalizzata al caso di somme numerabili si ha

$$\|g\|_p \le \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \le 1.$$

Dunque, è definita per μ-q.o. punto $x \in X$ anche la funzione $f : X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x), \quad \text{per q.o. } x \in X.$$

Proviamo che la funzione f è il limite della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nella distanza indotta dalla norma $\|\cdot\|_p$. Precisamente, affermiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu = 0.$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ usando il Lemma di Fatou e la condizione di Cauchy si vede che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{aligned} \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu &= \int_X \lim_{i\to\infty} |f_n(x) - f_{n_i}(x)|^p d\mu \\ &\le \liminf_{i\to\infty} \int_X |f_n(x) - f_{n_i}(x)|^p d\mu \le \varepsilon, \end{aligned}$$

pur di prendere $n \ge \bar{n}$. Dalla disuguaglianza (4.7) si trova

$$\int_X |f(x)|^p d\mu \le C_p \int_X (|f(x) - f_n(x)|^p + |f_n(x)|^p) d\mu,$$

e dunque $f \in L^p(X)$.

Consideriamo il caso $p = \infty$. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(X)$ e definiamo per ogni $m, n, k \in \mathbb{N}$ gli insiemi

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}, \\ B_k &= \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Tutti questi insiemi hanno misura nulla, e dunque anche l'insieme

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \cup \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} A_{mn},$$

ha misura nulla, $\mu(E) = 0$. Sul complementare $X \setminus E$, la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy e dunque converge uniformemente ad una funzione limitata f. $\square$

Corollario 4.6. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $1 \le p \le \infty$. Sia $f_n \in L^p(X)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni convergente in norma ad una funzione $f \in L^p(X)$. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente puntualmente ad f μ-q.o.

DIM. Poichè $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, l'affermazione segue dalla dimostrazione del teorema di completezza. □

4. Convergenza forte, debole, in misura e q.o.

Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Introduciamo e confrontiamo fra alcune nozioni di convergenza per successioni di funzioni (convergenza sequenziale). In generale, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sarà una successione di funzioni misurabili su X a valori in $[-\infty, \infty]$ ed f sarà una candidata funzione limite.

4.1. Convergenza forte. Sia $1 \le p \le \infty$. Diremo che $f_n \to f$ fortemente in $L^p(X)$ se $f_n, f \in L^p(X)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Sappiamo che in questo caso esiste una sottosuccessione $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ che converge q.o. ad f.

ESEMPIO 4.1. In generale la convergenza forte non implica che $f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$. Si consideri $X = [0,1]$ con la misura di Lebesgue e la successione di funzioni definita in questo modo:

$$\begin{aligned}
&f_1 = \chi_{[0,1]},\\
&f_2 = \chi_{[0,1/2]}, \quad f_3 = \chi_{[1/2,1]},\\
&f_4 = \chi_{[0,1/4]}, \quad f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}, \quad f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}, \quad f_7 = \chi_{[3/4,1]}\\
&f_8 = \chi_{[0,1/8]}, \quad \dots
\end{aligned}$$

Chiaramente, per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1,$$

mentre $\|f_n\|_p \to 0$ per ogni $1 \le p < \infty$ (ma non per $p = \infty$).

4.2. Convergenza debole. La nozione di convergenza debole nasce dalla nozione di topologia debole su $L^p(X)$ e dal teorema di dualità fra spazi $L^p(X)$. Ne diamo qui una presentazione autosufficiente ed equivalente.

Sia $1 \le p < \infty$. Diremo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente ad f in $L^p(X)$ se $f_n, f \in L^p(X)$ e per ogni $g \in L^q(X)$, con $1 < q \le \infty$ esponente di Hölder coniugato di p, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) g(x) d\mu = \int_X f(x) g(x) d\mu.$$

La convergenza debole si indica talvolta in questo modo $f_n \rightharpoonup f$ in L^p.

La convergenza forte implica quella debole. Questo segue dalla disuguaglianza di Hölder:

$$\Big| \int_X f_n g \, d\mu - \int_X f g \, d\mu \Big| \le \int_X |f_n - f||g| d\mu \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q.$$

Questa considerazione ha senso anche quando $p = \infty$. Ma per $p = \infty$ quella data sopra non sarebbe la definizione corretta di convergenza debole ed abbiamo per tale motivo escluso questo caso.

In alcuni casi è sufficiente verificare il test di convergenza debole per una classe ristretta di funzioni.

LEMMA 4.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto con la misura di Lebesgue e sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p(A)$, $1 < p < \infty$, tale che $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p < \infty$. Allora, si ha $f_k \rightharpoonup f \in L^p(A)$ in $L^p(A)$-debole se e solo se

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)\varphi(x)dx = \int_A f(x)\varphi(x)dx$$

per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(A)$, di classe C^∞ con supporto compatto in A.

DIM. Proviamo l'implicazione non banale. Data $g \in L^q(A)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\varphi \in C_c^\infty(A)$ tale che $\|g-\varphi\|_q < \varepsilon$. La dimostrazione di questo fatto è nel Teorema 4.5. Dunque, con la disuguaglianza di Hölder si trova

$$\begin{aligned}\Big|\int_A f_k g\,dx - \int_A fg\,dx\Big| &\le \Big|\int_A f_k\varphi\,dx - \int_A f\varphi\,dx\Big| + \Big|\int_A f_k(g-\varphi)\,dx - \int_A f(g-\varphi)dx\Big| \\ &\le \Big|\int_A f_k\varphi\,dx - \int_A f\varphi\,dx\Big| + (\|f_k\|_p + \|f\|_p)\|g-\varphi\|_q \\ &\le \Big|\int_A f_k\varphi\,dx - \int_A f\varphi\,dx\Big| + C\varepsilon,\end{aligned}$$

per una costante $0 \le C < \infty$ indipendente da k, e quindi

$$\limsup_{k\to\infty} \Big|\int_A f_k g\,dx - \int_A fg\,dx\Big| \le C\varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. La tesi segue. □

ESEMPIO 4.2. La convergenza debole non implica quella forte. Si consideri $X = (0,\pi)$ con la misura di Lebesgue e sia $f_n(x) = \sin(nx) \in L^p(0,\pi)$, $n \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$. La successione è anche in L^1 ed L^∞, ma non consideriamo questi casi. Affermiamo che

$$f_n \rightharpoonup 0 \text{ debolmente in } L^p(0,\pi).$$

Per il Lemma 4.1, e sufficiente verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \varphi(x)\sin(nx)dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(0,\pi)$. Con un'integrazione per parti si trova

$$\int_0^\pi \varphi(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos(nx)dx,$$

essendo $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Siccome $\|\varphi'\cos(nx)\|_\infty \le \|\varphi'\|_\infty < \infty$, l'affermazione segue. In ultima analisi, la convergenza debole a 0 è prodotta dalle oscillazioni della successione, che diventano sempre più frequenti.

D'altra parte, si ha

$$\int_0^\pi |\sin(nx)|^p dx = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\sin t|^p dt = \int_0^\pi |\sin t|^p dt > 0,$$

e quindi la successione non converge fortemente a 0 in $L^p(0,\pi)$.

Esempio 4.3. La convergenza puntuale non implica quella debole. Ad esempio, la successione $f_n = n\chi_{(0,1/n]} \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, converge a 0 in ogni punto, tuttavia

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

per ogni funzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Quindi non c'è convergenza a 0 in $L^1(\mathbb{R})$-debole.

Esercizio 4.4. La convergenza debole non implica quella puntuale, nemmeno per opportune sottosuccesioni. Cercare di provare questa affermazione costruendo un esempio.

4.3. Convergenza in misura. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e siano $f, f_n \in \mathscr{M}(X)$ funzioni misurabili, $n \in \mathbb{N}$. Si dice che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in misura ad f (e scriveremo "$f_n \to f$ in misura") se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$

Prima di descrivere il legame fra convergenza in misura, convergenza quasi ovunque e convergenza in L^1 premettiamo alcuni fatti generali.

Definizione 4.1. I limiti inferiore e superiore di una successione di insiemi $E_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, si definiscono nel seguente modo

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Lemma 4.2 (Borel-Cantelli). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili in X. Allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\big(\limsup_{n\to\infty} E_n\big) = 0.$$

Dim. È sufficiente osservare che

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'espressione a destra converge a zero in quanto resto di una serie convergente. □

Nella seguente proposizione descriviamo il legame fra convergenza in misura e quasi ovunque.

Teorema 4.3. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e siano $f, f_n \in \mathscr{M}(X)$ funzioni misurabili, $n \in \mathbb{N}$. Allora:

i) Se $\mu(X) < \infty$ ed $f_n(x) \to f(x)$ per μ-q.o. allora $f_n \to f$ in misura.
ii) Se $f_n \to f$ in misura, allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$.

Dim. Proviamo la i). Dato $\eta > 0$, per il teorema di Egorov esiste un insieme misurabile $X_\eta \subset X$ tale che $\mu(X \setminus X_\eta) \leq \eta$ ed $f_n \to f$ uniformemente su X_η. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \eta + \mu(\{x \in X_\eta : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}).$$

Daltra parte, per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\mu(\{x \in X_\eta : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_\eta} |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \eta.$$

e la tesi segue.

Proviamo la ii). Dalla definizione di convergenza in misura segue che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\Big(\Big\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\Big\}\Big) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Posto $A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 1/2^k\}$, la seguente serie converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty,$$

e per il lemma di Borel-Cantelli

$$\mu\Big(\limsup_{k\to\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} A_k\Big) = 0.$$

Pertanto, l'insieme

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} A_k$$

ha misura nulla e per ogni $x \in X \setminus A$ esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq j$ si ha

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Questo prova che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$. □

Teorema 4.4. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e siano $f, f_n \in L^1(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Se $f_n \to f$ in $L^1(X)$ forte allora $f_n \to f$ in misura. Il viceversa non è vero nemmeno per sottosuccessioni.

Dim. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu,$$

e la tesi segue. La costruzione di un controesempio è lasciata come esercizio. □

Teorema 4.5. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $\mu(X) < \infty$, e siano $f, f_n \in \mathscr{M}(X)$ funzioni misurabili, $n \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) $f_n \to f$ in misura.

B) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu = 0.$$

Dim. A)⇒B) Non è restrittivo supporre $f = 0$. Partiamo dall'identità

$$\int_X \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx = \int_0^1 \mu\Big(\Big\{x \in X : |f_n(x)| \geq \frac{t}{1-t}\Big\}\Big) dt = \int_0^1 \varphi_n(t) dt,$$

dove abbiamo posto

$$\varphi_n(t) = \mu\Big(\Big\{x \in X : |f_n(x)| \geq \frac{t}{1-t}\Big\}\Big).$$

Se vale A), allora per ogni $t \in (0,1)$ esiste il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0.$$

Dunque, per il Teorema della convergenza dominata si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) dt = 0.$$

La prova dell'implicazione inversa è lasciata come esercizio.

□

5. Regolarizzazioni

In questa sezione introduciamo la teoria delle regolarizzazioni di funzioni in $\mathbb{R}^n$, su cui fissiamo la misura di Lebesgue.

5.1. Nucleo di regolarizzazione. Sia $\chi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ la funzione

$$\chi(x) = \begin{cases} c_0 \exp\Big(\dfrac{1}{|x|^2-1}\Big), & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Chiaramente si ha $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. La costante $c_0 > 0$ è fissata in modo tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo le funzioni $\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Queste funzioni verificano le seguenti proprietà:

i) $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
ii) $\chi_\varepsilon \geq 0$ e $\chi_\varepsilon(x) > 0$ se e solo se $|x| < \varepsilon$;
iii) Per le proprietà di invarianza della misura di Lebesgue rispetto alle dilatazioni si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) dy = 1. \tag{4.8}$$

Dunque, per $\varepsilon \to 0$ l'integrale si concentra in $x = 0$. La famiglia di funzioni $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ si dice nucleo di regolarizzazione o anche approssimazione dell'unità.

5.2. Regolarizzazione di funzioni localmente integrabili. Una funzione $\mathscr{L}^n$-misurabile $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ si dice localmente integrabile, e scriveremo $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, se per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si ha $f \in L^1(K)$.

Definizione 4.1. Data una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \chi_\varepsilon * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Abbiamo usato la notazione $*$ per la convoluzione. L'integrale converge perchè l'integrazione è ristretta alla palla $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < \varepsilon\}$. Con il cambio di variabile $x - y = z$, fatto a x fissato, l'integrale può essere trasformato nel seguente modo

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\chi_\varepsilon(y)dy = f * \chi_\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ricordiamo che il supporto di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ è l'insieme (chiuso)

$$\operatorname{spt}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 4.2 (Proprietà della regolarizzazione). Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
ii) Detto $K = \operatorname{spt}(f)$ si ha $\operatorname{spt}(f_\varepsilon) \subset K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon\}$, per ogni $\varepsilon > 0$.
iii) Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$ è continua, allora $f_\varepsilon \to f$ per $\varepsilon \to 0^+$ uniformemente sui compatti.
iv) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p \le \infty$ allora $\|f_\varepsilon\|_p \le \|f\|_p$.

Dim. i) Proviamo che f_ε è una funzione continua in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se $|x - x_0| \le 1$ allora $\operatorname{spt}(\chi_\varepsilon(\cdot - x)) \subset K = \bar{B}_{1+\varepsilon}(x_0)$. Siccome χ_ε è limitata ed $f \in L^1(K)$, per il Teorema della convergenza dominata si può portare il limite $x \to x_0$ dentro l'integrale

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f_\varepsilon(x) &= \lim_{x\to x_0} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x\to x_0} \chi_\varepsilon(x-y)f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x_0-y)f(y)dy = f_\varepsilon(x_0).\end{aligned}$$

In modo analogo, essendo per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\Big|\frac{\partial \chi_\varepsilon(x-y)}{\partial x_i}\Big| \le \|\nabla \chi_\varepsilon\|_\infty,$$

è possibile derivare sotto segno di integrale

$$\frac{\partial f_\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}\chi_\varepsilon(x-y)f(y)dy.$$

Come per la continuità di f_ε si dimostra che la funzione

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}\chi_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

è continua, e quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Ora per induzione si prova che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii) Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathrm{dist}(x, K) > \varepsilon$. Per continuità della funzione distanza, esiste $\delta > 0$ tale che $\mathrm{dist}(z, K) > \varepsilon$ per ogni $z \in B_\delta(x)$. Se $f(y) \neq 0$ allora $y \in K$ e dunque

$$|z - y| \geq \mathrm{dist}(z, K) > \varepsilon.$$

Quindi $f(y) \neq 0$ implica $\chi_\varepsilon(z - y) = 0$ e questo prova che $f_\varepsilon(z) = 0$. Dunque, x è un punto interno dell'insieme $\{f_\varepsilon = 0\}$ e pertanto $\mathrm{spt}(f_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$.

iii) Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto allora anche l'insieme $K_1 = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{dist}(x, K) \leq 1\}$ è compatto, essendo chiuso e limitato. Essendo f continua su K_1, allora è uniformemente continua: per ogni $\sigma > 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$x, y \in K_1 \text{ e } |x - y| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \sigma.$$

Siano $x \in K$ e $0 < \varepsilon < 1$. Dalla proprietà (4.8) del nucleo di regolarizzazione segue che

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)(f(y) - f(x))dy,$$

dove l'integrazione è ristretta all'insieme $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\} \subset K_1$. Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo si ha $|f(y) - f(x)| < \sigma$ per ogni $x \in K$ e per ogni y tale che $|x - y| < \varepsilon$, e quindi

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y) - f(x)|dy \leq \sigma \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)dy = \sigma.$$

Abbiamo usato il fatto che $\chi_\varepsilon \geq 0$. Questo prova la convergenza uniforme su K.

iv) Sia ora $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ e sia $1 < q < \infty$ l'esponente di Hölder coniugato. I casi $p = 1$ e $p = \infty$ sono più facili. Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} |f(y)|dy \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)dy\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, usando il Teorema di Fubini-Tonelli sullo scambio dell'ordine di integrazione si trova

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)|f(y)|^p dy\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x - y)dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Nella prossima sezione proveremo che $f_\varepsilon \to f$ in L^p-forte. $\square$

6. Le funzioni continue a supporto compatto sono dense in L^p

In questa sezione proviamo il teorema di densità in $L^p(A)$ delle funzioni continue a supporto compatto quando A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue. Il teorema ha una formulazione più generale negli spazi metrici localmente compatti con una misura di Radon.

Teorema 4.3 (Densità). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per ogni $1 \leq p < \infty$, l'insieme delle funzioni continue con supporto compatto in A è denso in $L^p(A)$:

$$\overline{C_c(A)}^{L^p(A)} = L^p(A).$$

Dim. Dobbiamo provare che per ogni $f \in L^p(A)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c(A)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Possiamo supporre che f abbia supporto compatto in A e che sia $f \geq 0$. Dal Teorema 2.9 e dal teorema della convergenza dominata segue l'esistenza di una funzione semplice φ tale $0 \leq \varphi \leq f$ ed

$$\int_A |f(x) - \varphi(x)|^p dx < \varepsilon.$$

La funzione semplice è della forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{A_k}(x), \quad x \in A.$$

con $A_k \subset A$ insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili disgiunti fra loro e $c_k \geq 0$. Dunque, le funzioni semplici sono dense in $L^p(A)$.

Possiamo supporre che gli insiemi A_k siano sottoinsiemi del supporto di f (altrimenti $c_k = 0$) e quindi che siano a chiusura compatta in A. È sufficiente allora dimostrare che per ogni insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile $E \subset A$ con chiusura compatta in A e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C_c(A)$ tale che

$$\int_A \big|\chi_E(x) - g(x)\big|^p dx < \varepsilon.$$

Per il Teorema 3.6 esistono un aperto $\Omega \subset A$ ed un chiuso C tali che $C \subset E \subset \Omega$ ed inoltre $\mathscr{L}^n(\Omega \setminus C) < \varepsilon$. Siccome E ha chiusura compatta in A, possiamo supporre che anche Ω abbia chiusura compatta in A e che C sia compatto.

Definiamo le seguente funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) + \operatorname{dist}(x, C)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che il denominatore non è mai 0, grazie alle inclusioni $C \subset E \subset \Omega$ con C compatto. Dunque g è ben definita ed è una funzione continua, essendo quoziente di funzioni continue. Inoltre si ha: 1) $g(x) = 1$ per ogni $x \in C$; 2) $g(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$; 3) $0 \leq g(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. In particolare, si ha $g \in C_c(A)$. Infine, si stima

$$\int_A \big|\chi_E(x) - g(x)\big|^p dx = \int_{\Omega \setminus C} \big|\chi_E(x) - g(x)\big|^p dx \leq \mathscr{L}^n(\Omega \setminus C) \leq \varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione.

$\square$

7. Convergenza in media e Teorema di Riemann-Lebesgue

TEOREMA 4.4. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora:

i) Vale la "continuità in media"

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dx = 0.$$

ii) Le regolarizzazioni convergono in L^p-forte:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

DIM. i) Fissato $\sigma > 0$, per il Teorema di densità esiste una funzione $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f-g\|_p \leq \sigma$. Detto $K = \mathrm{spt}(g)$ il supporto di g e posto $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x,K) \leq 1\}$, per la uniforme continuità su $\mathbb{R}^n$ di g esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in K$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| \leq 1$ si ha

$$|h| < \varepsilon \quad\Rightarrow\quad |g(x+h)-g(x)| \leq \frac{\sigma}{\mathscr{L}^n(K_1)^{1/p}}.$$

Di conseguenza, per $|h| \leq \varepsilon \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p} &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-g(x+h)|^p dx\Big)^{1/p} + \\ &\quad + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+h)-g(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\ &\quad + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\ &= 2\|f-g\|_p + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+h)-g(x)|^p dx\Big)^{1/p} \\ &\leq 3\sigma.\end{aligned}$$

Questo prova la prima affermazione.

ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha, come nella dimostrazione Teorema 6.9 parte iv),

$$|f_\varepsilon(x)-f(x)| = \Big|\int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h)(f(x+h)-f(x))dh\Big| \leq \Big(\int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h)|f(x+h)-f(x)|^p dh\Big)^{1/p},$$

e dunque, usando il Teorema di Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)-f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h)|f(x+h)-f(x)|^p dh\,dx \\ &\leq \int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon(h)\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dx\,dh.\end{aligned}$$

Ora l'affermazione segue dalla continuità in media. □

Il Teorema 4.3 può essere migliorato.

TEOREMA 4.5 (Densità). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per ogni $1 \leq p < \infty$, l'insieme delle funzioni C^∞ con supporto compatto in A è denso in $L^p(A)$:

$$\overline{C_c^\infty(A)}^{L^p(A)} = L^p(A).$$

DIM. Per ogni $\delta > 0$, l'insieme

$$K_\delta = \{x \in A : \text{dist}(x, \partial A) \geq \delta \text{ e } |x| \leq 1/\delta\}$$

è un sottoinsieme compatto di A ed inoltre, per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_A |f(x) - f(x)\chi_{K_\delta}(x)|^p dx = 0.$$

Senza perdere di generalità possiamo allora supporre che f abbia supporto compatto in A (ed estendere la funzione f su tutto $\mathbb{R}^n$ ponendola uguale a 0 fuori da A).

Per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo la regolarizzazione $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ha supporto compatto contenuto in A. Questo è vero perchè $\text{dist}(K, \partial A) = \inf\{|x - y| : x \in K,\, y \in \partial A\} > 0$. Per il Teorema 4.4 parte ii) si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|f_\varepsilon - f\|_p = 0,$$

e l'affermazione segue. □

Presentiamo ora un'applicazione del Teorema di densità alla trasformata di Fourier. Data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si definisce la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i \langle \xi, x\rangle} f(x) dx,$$

dove $\langle x, \xi\rangle$ è il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. L'integrale converge perchè convergono la sua parte reale e la sua parte immaginaria. È elementare controllare che $\widehat{f}$ è una funzione continua (usare il Teorema della convergenza dominata).

TEOREMA 4.6 (Riemann-Lebesgue). Per ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

DIM. Proviamo il teorema quando $n = 1$. Il caso $n \geq 2$ si riduce al caso $n = 1$ usando il Teorema di Fubini-Tonelli. Per il Teorema 4.5, dato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Con una integrazione per parti si trova

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{2\pi i x\xi} dx = \frac{i}{2\pi\xi} \int_{\mathbb{R}} g'(x)\mathrm{e}^{2\pi i x\xi} dx,$$

e siccome $|g'(x)\mathrm{e}^{2\pi i x\xi}| = |g'(x)| \in L^1(\mathbb{R})$, segue che

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{g}(\xi) = 0.$$

La tesi è ora una conseguenza della disuguaglianza

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_1 + |\widehat{g}(\xi)|.$$

□

8. Cenni sulla separabilità

Consideriamo uno spazio di misura $(X, \mathscr{A}, \mu)$. La σ-algebra $\mathscr{A}$ si dice separabile se è generata da un insieme numerabile di insiemi, cioè se è la più piccola σ-algebra che contiene questo insieme numerabile. In questo caso, lo spazio $L^p(X)$ è separabile per ogni $1 \le p < \infty$. Ad esempio, la σ-algebra degli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili di $\mathbb{R}^n$ è generata dai plurintervalli di estremi razionali e quindi è separabile.

Non ci interessa vedere le dimostrazioni di queste affermazioni, osserviamo solamente che L^∞ in generale non è separabile.

Proposizione 4.7. In generale $L^\infty(X)$ non è separabile.

Dim. Consideriamo $X = \mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue. Posto $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, definiamo per ogni $r > 0$ la famiglia di funzioni

$$\mathscr{B}_r = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f - \chi_{B_r}\|_\infty < \frac{1}{2}\}.$$

Osserviamo che ogni $\mathscr{B}_r$ è un aperto di $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e che $\mathscr{B}_{r_1} \cap \mathscr{B}_{r_2} = \emptyset$ ogni volta che $r_1 \neq r_2$. Si è in questo modo costruita una famiglia più che numerabile di aperti disgiunti.

Consideriamo ora un insieme di funzioni $\mathscr{F} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ che sia denso. Allora per ogni $r > 0$ esiste $f_r \in \mathscr{F}$ tale che $f \in \mathscr{B}_r$. La funzione $F : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{F}$ tale che $F(r) = f_r$ è iniettiva. Quindi $\mathscr{F}$ ha cardinalità più che numerabile. $\square$

9. Teorema di dualità di L^p

Siano $1 \le p, q \le \infty$ due esponenti di Hölder coniugati. Data una funzione $g \in L^q(X)$ definiamo l'operatore lineare $T_g : L^p(X) \to \mathbb{R}$

$$T_g(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder segue che $|T_g(f)| \le \|f\|_p \|g\|_q$ e quindi la norma di T_g come operatore verifica

$$\|T_g\| = \sup_{\|f\|_p = 1} \Big| \int_X f(x)g(x)d\mu \Big| \le \|g\|_q$$

Scegliendo $f(x) = \|g\|_q^{-q/p} g(x)^{q/p}$ si deduce the $\|T_g\| = \|g\|_q$. Dunque, ogni funzione $g \in L^q(X)$ definisce in modo naturale un operatore lineare e limitato su $L^p(X)$ con norma operatoriale $\|g\|_q$. Nel seguente teorema proviamo anche il viceversa: ogni operatore lineare e limitato su $L^p(X)$ può essere identificato in modo isometrico (con uguaglianza di norme) con una funzione di $L^q(X)$.

Teorema 4.8 (Dualità). Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e siano $1 \le p < \infty$ e $1 < q \le \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora si ha

$$L^p(X)^* = L^q(X),$$

dove l'uguaglianza rappresenta una identificazione isometrica. Nel caso $p = 1$ si assume che la misura μ sia σ-finita.

Dim. Sia $T \in L^p(X)^*$ un funzionale lineare e continuo su $L^p(X)$. Dobbiamo dimostrare che esiste una funzione $h \in L^q(X)$ tale che

$$T(f) = \int_X f\, h\, d\mu$$

per ogni $f \in L^p(X)$ e che risulta $\|T\| = \|h\|_q$. Per semplicità, dimostreremo questo fatto nelle seguenti ipotesi: i) $\mu(X) < \infty$. ii) Il funzionale è positivo: $f \geq 0$ implica $T(f) \geq 0$.

Si inizia ad introdurre una nuova misura. Per ogni $A \in \mathscr{A}$ definiamo

$$\lambda(A) = T(\chi_A).$$

Si osserva che $\chi_A \in L^p(X)$ e che $\lambda(A) \geq 0$ per le ipotesi fatte. Controlliamo che λ sia numerabilmente additiva. Sia $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ con unione disgiunta e insiemi misurabili. Per il teorema della convergenza dominata, per $N \to \infty$ risulta

$$\sum_{n=1}^N \chi_{A_n} \to \chi_A$$

nella norma L^p. Dunque, usando la continuità e la linearità di T si trova

$$\lambda(A) = T(\chi_A) = \lim_{N\to\infty} T\Big(\sum_{n=1}^N \chi_{A_n}\Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N T(\chi_{A_n}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n).$$

Inoltre, la misura λ è assolutamente continua rispetto a μ, infatti

$$\lambda(A) = T(\chi_A) \leq \|T\|\mu(A)^{\frac{1}{p}}.$$

In particolare anche la misura λ è finita. Siamo nelle ipotesi del teorema di Radon-Nikodym, si veda il Teorema 6.3, e dunque esiste una funzione misurabile $h \geq 0$ tale che

$$\lambda(A) = \int_A h\, d\mu.$$

Per ogni funzione semplice $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \chi_{A_i}$ si ha

$$T(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i T(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \int_X \chi_{A_i} h\, d\mu = \int_X \varphi\, h\, d\mu.$$

Se, poi, $f \geq 0$ è in $L^p(X)$, allora esiste una successione crescente di funzioni semplici φ_n tali che $\varphi_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$, e dunque con il teorema della convergenza monotona si ottiene

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n h\, d\mu = \int_X f\, h\, d\mu.$$

Infine, se f non è positiva si scrive $f = f^+ - f^-$, etc.

Rimane da dimostrare che $h \in L^q(X)$ e $\|h\|_q = \|T\|$. Da un lato, per ogni $p \geq 1$ si ha

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |T(f)| \leq \sup_{\|f\|_p \leq 1} \Big| \int_X f\, h\, d\mu \Big| \leq \|h\|_q.$$

Consideriamo ora il caso $p > 1$. Esiste una successione di funzioni semplici $0 \leq \varphi_n \leq h$ che convergono in modo monotono crescente ad h in ogni punto. Si ha per $k \geq 1$ da determinare in seguito

$$T(\varphi_n^k) = \int_X \varphi_n^k h \, d\mu \geq \int_X \varphi_n^{k+1} d\mu,$$

e poichè

$$T(\varphi_n^k) \leq \|T\| \Big(\int_X \varphi_n^{kp} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}},$$

scegliendo k in modo tale che $kp = k + 1$ e cioè $k = \frac{1}{p-1}$, si trova

$$\|T\| \Big(\int_X \varphi_n^{\frac{p}{p-1}} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \geq \int_X \varphi_n^{\frac{p}{p-1}} d\mu$$

e quindi

$$\Big(\int_X \varphi_n^q d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|.$$

Passando al limite con il Teorema della convergenza monotona, la stessa maggiorazione vale per h. Questo prova che $\|T\| = \|h\|_q$ nel caso $p > 1$.

Consideriamo il caso $p = 1$ e $q = \infty$. Bisogna provare che $\|h\|_\infty \leq \|T\|$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ stimiamo la misura

$$\mu\Big(\Big\{ x \in X : h(x) \geq \|T\| + \frac{1}{n} \Big\} \Big) := \mu(A_n).$$

Poiché si ha

$$\|T\| \mu(A_n) \geq T(\chi_{A_n}) = \int_{A_n} h \, d\mu \geq \mu(A_n) \Big(\|T\| + \frac{1}{n} \Big),$$

si deduce che $\mu(A_n) = 0$, e poichè $n \in \mathbb{N}$ è arbitrario si trova

$$\mu(\{x \in X : h(x) > \|T\|\}) = 0,$$

e quindi $\|h\|_\infty \leq \|T\|$.

$\square$

Osservazione 4.9. L'ipotesi $\mu(X) < \infty$ si toglie con un argomento di scomposizione. L'ipotesi che T sia positivo si toglie scrivendo T come differenza di due operatori positivi.

Osservazione 4.10. Risulta $L^1(X) \subset L^\infty(X)^*$ con inclusione stretta. Per vedere questo fatto si consideri ad esempio il funzionale di Dirac su $C([-1, 1])$.

CAPITOLO 5

Misure prodotto e Teorema di Fubini-Tonelli

In questo capitolo dimostriamo il teorema di Fubini-Tonelli ed esaminiamo alcune sue applicazioni. Premettiamo alcune considerazioni sulle misure su semianelli che sono propedeutiche alla costruzione delle misure prodotto.

1. Misure su semianelli

Incominciamo con la definizione di misura su semianello. Nel seguito, X è un insieme.

Definizione 5.1 (Semianello). Una famiglia di sottoinsiemi $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ si dice un *semianello su* X se:

i) $\emptyset \in \mathscr{S}$;
ii) Se $A, B \in \mathscr{S}$ allora anche $A \cap B \in \mathscr{S}$;
iii) Per ogni coppia di insiemi $A, B \in \mathscr{S}$ esiste una famiglia finita di insiemi disgiunti $C_i \in \mathscr{S}$, $i = 1, \dots, k$, tale che
$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{k} C_i.$$

La proprietà al punto iii) si estende al caso di differenze finite del tipo $A \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ con $m \geq 1$.

Esempio 5.2. Un esempio di semianello è la famiglia dei plurintervalli aperti a destra di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 5.3. Un altro esempio di semianello è il prodotto Cartesiano di due σ-algebre. Siano $\mathscr{A}$ una σ-algebra su un insieme X e $\mathscr{B}$ una σ-algebra su un insieme Y. Verifichiamo che l'insieme
$$\mathscr{S} = \{A \times B \in \mathscr{P}(X \times Y) : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}$$
è un semianello sul prodotto Cartesiano $X \times Y$. Infatti:

i) $\emptyset \times \emptyset \in \mathscr{S}$;
ii) Se $H, K \in \mathscr{S}$ con $H = A_1 \times B_1$ e $K = A_2 \times B_2$, allora
$$H \cap K = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathscr{S},$$
dal momento che $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{A}$ e $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$.
iii) Siano H, K come sopra e proviamo che $H \setminus K$ è un'unione finita di elementi di $\mathscr{S}$. Infatti, si ha
$$\begin{aligned} H \setminus K &= (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) \\ &= (A_1 \setminus A_2 \times B_1) \cup (A_1 \cap A_2 \times B_1 \setminus B_2) \end{aligned}$$
e l'ultimo insieme è un'unione disgiunta di elementi di $\mathscr{S}$.

In effetti, queste considerazioni mostrano che il prodotto di semianelli è ancora un semianello.

Definizione 5.4 (Misura su semianello). Una funzione $\mu : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ è una misura sul semianello $\mathscr{S}$ di X se:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) Se $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, con $A, A_n \in \mathscr{S}$, $n \in \mathbb{N}$, e unione disgiunta, allora vale l'adittività numerabile
$$\mu(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

A partire dalla misura μ sul semianello $\mathscr{S}$ definiamo una misura esterna $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ ponendo

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n,\ A_n \in \mathscr{S}\Big\}. \tag{5.1}$$

Se non c'è un ricoprimento numerabile di A con insiemi del semianello, allora si pone $\mu^*(A) = \infty$. Mostriamo che μ^* è una misura esterna. Dati $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, con $A, A_n \subset X$, dobbiamo provare che

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n).$$

Se la serie a destra è ∞ l'affermazione è vera. Supponiamo che la serie converga ad un valore finito e, dato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo degli insiemi $A_{nj} \in \mathscr{S}$ tali che

$$\sum_{j=1}^\infty \mu(A_{nj}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

La famiglia di insiemi $\{A_{nj} \in \mathscr{P}(X) : n, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{S}$ è un ricoprimento di A e dunque

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \mu(A_{nj}) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon + \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n).$$

Dalla arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene la tesi.

I seguenti lemmi ricalcano quanto già visto per la misura di Lebesgue.

Lemma 5.5. Per ogni $A \in \mathscr{S}$ si ha $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Dim. Poichè A è un ricoprimento di se stesso risulta $\mu^*(A) \le \mu(A)$. Bisogna provare la disuguaglianza opposta $\mu(A) \le \mu^*(A)$. Se $\mu^*(A) = \infty$ non vi è niente da dimostrare. Supponiamo allora che sia $\mu^*(A) < \infty$ e, fissato $\varepsilon > 0$, siano $A_n \in \mathscr{S}$ tali che

$$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n, \quad \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \le \varepsilon + \mu^*(A).$$

A meno di scegliere $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathscr{S}$, non è restrittivo supporre che gli $A_n \in \mathscr{S}$ siano disgiunti. Qui stiamo usando la proprietà iii) di un semianello.

Osserviamo che si ha

$$A = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap A_n,$$

con $A \cap A_n \in \mathscr{S}$. Dalla proprietà di adittività della misura e dal fatto che $\mu(A \cap A_n) \leq \mu(A)$ (provare), si trova

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \varepsilon + \mu^*(A).$$

Dalla arbitrarietà di ε si ottiene la tesi. □

Indichiamo con $\mathscr{M}$ la σ-algebra degli insiemi di X che sono μ^*-misurabili. Indichiamo ancora con μ la restrizione di μ^* ad $\mathscr{M}$.

Lemma 5.6. Sia μ una misura sul semianello $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$, e sia μ^* la misura esterna su X generata da μ. Allora gli insiemi nel semianello sono μ^*-misurabili, ovvero $\mathscr{S} \subset \mathscr{M}$.

Dim. Dobbiamo provare che per ogni $A \in \mathscr{S}$ e per ogni $E \subset X$ si ha

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A').$$

Consideriamo un ricoprimento $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathscr{S}$. Dal fatto che μ^* è una misura esterna e dal Lemma 5.5 si trova

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A') &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A') \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A') \end{aligned}$$

D'altra parte, avremo

$$A_n = (A_n \cap A) \cup (A_n \cap A') = (A_n \cap A) \cup \bigcup_{C \in \mathscr{E}_n} C$$

per una certa famiglia finita $\mathscr{E}_n \subset \mathscr{S}$ e con unioni tutte disgiunte. Dunque, si ottiene

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \sum_{C \in \mathscr{E}_n} \mu(C),$$

e sommando su n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C \in \mathscr{E}_n} \mu(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A').$$

In conclusione, per ogni ricoprimento di E si ha la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A'),$$

e dunque la disuguaglianza segue anche per E. □

Osservazione 5.7 (Insiemi “coperchio”). Dato un insieme $E \subset X$ di misura esterna finita, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono degli insiemi $A_{nj} \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$, tali che

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{nj}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

L'insieme $A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{nj}$ è di tipo $\mathscr{S}_\sigma$, cioè è un'unione numerabile di insiemi di $\mathscr{S}$. L'unione può essere scelta disgiunta per la proprietà iii) dei semianelli.

L'insieme

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

è di tipo $\mathscr{S}_{\sigma\delta}$, cioè è una intersezione numerabile di elementi di $\mathscr{S}_\sigma$. Per la proprietà ii) dei semianelli si può supporre che la successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia decrescente (provare).

Risulta $E \subset A$ e dunque $\mu^*(E) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$, essendo A μ^*-misurabile. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mu(A) \leq \mu(A_n) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n},$$

e quindi $\mu(A) \leq \mu^*(E)$. In conclusione, ogni insieme E può essere ricoperto con un insieme (misurabile) di tipo $\mathscr{S}_{\sigma\delta}$ con la stessa misura (esterna) di E.

Teorema 5.8. Sia $f \in L^1(X, \mu)$ una funzione tale che

$$\int_A f(x) d\mu = 0 \tag{5.2}$$

per ogni $A \in \mathscr{S}$. Allora $f(x) = 0$ per μ-q.o. $x \in X$.

Dim. Estendiamo la (5.2) ad ogni insieme misurabile $A \subset X$. Se $A \in \mathscr{S}_\sigma$, ovvero $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathscr{S}$ e unione disgiunta (ci si può sempre riportare a questo caso), allora per il teorema della convergenza dominata

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu = 0.$$

Se poi $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathscr{S}_\sigma$ e $A_{n+1} \subset A_n$, allora sempre per il Teorema della convergenza dominata si ha

$$\int_B f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu = 0.$$

Se, infine, E è un insieme μ-misurabile con misura finita allora esiste un insieme $B \in \mathscr{S}_{\sigma\delta}$ tale che $\mu(B \setminus E) = 0$, e dunque

$$\int_E f(x) d\mu = \int_B f(x) d\mu = 0.$$

Sia ora $A_n^+ = \{x \in X : f(x) \geq 1/n\}$. Questo insieme è μ-misurabile in quanto f è misurabile, ed ha misura finita in quanto f è integrabile. Dunque si ha

$$0 = \int_{A_n^+} f(x) d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(A_n^+),$$

e pertanto $\mu(A_n^+) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In modo identico si prova che, posto $A_n^- = \{x \in X : f(x) \leq -1/n\}$, si ha $\mu(A_n^-) = 0$. Questo prova che $f = 0$ q.o. $\square$

2. Misure prodotto. Teorema di riduzione

Siano $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ due spazi di misura. Abbiamo visto che l'insieme

$$\mathscr{S} = \{A \times B \in \mathscr{P}(X \times Y) : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\}$$

è un semianello di $X \times Y$. Su $\mathscr{S}$ si definisce la misura prodotto

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

per $A \in \mathscr{A}$ e $B \in \mathscr{B}$. Verifichiamo che $\mu \otimes \nu$ è effettivamente una misura:

i) $\mu \otimes \nu(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset)\nu(\emptyset) = 0$;

ii) Supponiamo che sia $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n$ con unione disgiunta, e mostriamo che

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu \otimes \nu(A_n \times B_n).$$

Se $x \in A$, allora

$$\{x\} \times B = \bigcup_{\substack{n=1 \\ x \in A_n}}^{\infty} \{x\} \times B_n,$$

con unione disgiunta, e dunque

$$\nu(B)\chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n)\chi_{A_n}(x).$$

Integrando tale identità si trova

$$\mu(A)\nu(B) = \int_A \nu(B) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \int_X \chi_{A_n}(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n).$$

Questa è la tesi.

La misura $\mu \otimes \nu$ su $\mathscr{S}$ si prolunga con il procedimento di Carathéodory ad una misura completa sulla σ-algebra $\mathscr{M}$ degli insiemi misurabili in $X \times Y$. Indicheremo questa misura ancora con $\mu \otimes \nu$ e la chiameremo *misura prodotto* di μ e ν.

Definizione 5.9 (Spazio di misura $\sigma-$finito). Diciamo che uno spazio di misura $(X, \mathscr{A}, \mu)$ è σ-finito se esiste una successione di insiemi $X_n \in \mathscr{A}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $\mu(X_n) < \infty$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Definizione 5.10. Diciamo che uno spazio di misura $(X, \mathscr{A}, \mu)$ è completo se dati $A, B \subset X$ con $A \subset B$, $B \in \mathscr{A}$ e $\mu(B) = 0$ allora si ha $A \in \mathscr{A}$.

Osservazione 5.11. Ogni misura si può esterndere ad una misura completa. Dato uno spazio di misura $(X, \mathscr{A}, \mu)$, la σ-algebra $\mathscr{A}$ è un semianello. Dunque la misura μ su $\mathscr{A}$ definisce una misura esterna $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ come in (5.1). Per il Lemma 5.5 ogni insieme $A \in \mathscr{A}$ verifica $\mu^*(A) = \mu(A)$, e per il Lemma 5.6 si ha $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$, la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili. La funzione $\mu^* : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ è una misura completa che estende la misura μ.

Il primo passo verso il Teorema di Fubini-Tonelli è il seguente teorema di riduzione.

TEOREMA 5.12 (Teorema di riduzione). Siano $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ due spazi di misura σ-finiti. Supponiamo che ν sia una misura completa e sia $A \subset X \times Y$ un insieme misurabile rispetto alla misura prodotto $\mu \otimes \nu$. Per $x \in X$ definiamo la sezione $A^x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$. Allora:

i) L'insieme A^x è ν-misurabile per μ-quasi ogni $x \in X$.
ii) La funzione $x \mapsto \nu(A^x)$ è μ-misurabile.
iii) Vale la formula di riduzione

$$\mu \otimes \nu(A) = \int_X \nu(A^x) d\mu(x).$$

DIM. Supponiamo che μ e ν siano misure finite.

Caso I. Sia $A = H \times K$ con $H \in \mathscr{A}$ e $K \in \mathscr{B}$. Allora

$$A^x = \begin{cases} K & \text{se } x \in H \\ \emptyset & \text{se } x \in X \setminus H \end{cases}$$

e dunque A^x è ν-misurabile per ogni $x \in X$. Inoltre, la funzione $x \mapsto \nu(A^x) = \nu(K)\chi_H(x)$ è μ-misurabile per la misurabilità di H, e si ha

$$\int_X \nu(A^x) d\mu = \nu(K) \int_X \chi_H(x) d\mu = \mu(H)\nu(K) = \mu \otimes \nu(A).$$

Caso II. Sia $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ con A_n insiemi del tipo I ed unione disgiunta. Allora si ha $A^x = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^x$, con unione disgiunta, e l'insieme A^x è misurabile in quanto unione numerabile di insiemi misurabili. Usando l'additività numerabile della misura si ha

$$\nu(A^x) = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n^x),$$

e dunque la funzione $x \mapsto \nu(A^x)$ è misurabile in quanto limite (somma numerabile) di funzioni misurabili. Infine, usando il teorema della convergenza monotona si trova

$$\int_X \nu(A^x) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X \nu(A_n^x) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu \otimes \nu(A_n) = \mu \otimes \nu(A).$$

Caso III. Sia $B = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ dove $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione *descrescente* di insiemi di tipo II. L'insieme $B^x = \bigcap_{n=1}^\infty A_n^x$ è misurabile in quanto intersezione numerabile di insiemi misurabili. Inoltre la successione di sezioni $(A_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e per la continuità della misura su successioni decrescenti si ha

$$\nu(B^x) = \lim_{n \to \infty} \nu(A_n^x).$$

Qui stiamo usando l'ipotesi che ν sia una misura finita. Infine, se anche μ è finita possiamo usare il Teorema della convergenza dominata per concludere che

$$\int_X \nu(B^x) d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \nu(A_n^x) d\mu = \lim_{n \to \infty} \mu \otimes \nu(A_n) = \mu \otimes \nu(B).$$

Caso IV. Supponiamo ora che A sia un insieme di misura nulla: $\mu \otimes \nu(A) = 0$. Esiste un insieme B di tipo III tale che $A \subset B$ e $\mu \otimes \nu(B) = \mu \otimes \nu(A) = 0$. Poiché si ha

$$0 = \mu \otimes \nu(B) = \int_X \nu(B^x) d\mu$$

segue che $\nu(B^x) = 0$ per μ-quasi ogni $x \in X$. Poichè la misura ν è completa e poichè $A^x \subset B^x$, segue che A^x è misurabile per quasi ogni $x \in X$ e $\nu(A^x) = 0$. Ora, si ha chiaramente

$$\mu \otimes \nu(A) = 0 = \int_X \nu(A^x) d\mu.$$

Caso V. Sia ora A un insieme misurabile (di misura finita). Esiste un insieme B di tipo III tale che $A \subset B$ e $\mu \otimes \nu(B) = \mu \otimes \nu(A)$. L'insieme $C = B \setminus A$ ha misura nulla. Poiché $A^x = B^x \setminus C^x$, l'insieme A^x è misurabile per μ-q.o. $x \in X$ e inoltre $\nu(A^x) = \nu(B^x)$. Dunque, la funzione $x \mapsto \nu(A^x)$ è misurabile, poichè lo è $x \mapsto \nu(B^x)$. In conclusione, si trova

$$\mu \otimes \nu(A) = \mu \otimes \nu(B) = \int_X \nu(B^x) d\mu = \int_X \nu(A^x) d\mu.$$

Il teorema è provato nel caso che le misure siano finite. Lasciamo il compito al lettore di provare il teorema quando sia μ che ν sono σ-finite. $\square$

Esempio 5.13. Su $[0,1]$ consideriamo la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1$ e la counting measure χ. La misura χ non è σ-finita. Sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$ abbiamo la misura prodotto $\chi \otimes \mathscr{L}^1$. Consideriamo la diagonale $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x = y\}$ con le sezioni $A^x = \{x\}$. Allora si ha

$$\int_{[0,1]} \mathscr{L}^1(A^x) d\chi(x) = 0,$$

mentre

$$\int_{[0,1]} \chi(A^y) d\mathscr{L}^1(y) = 1.$$

Quindi il teorema di riduzione non vale per la misura prodotto $\chi \otimes \mathscr{L}^1$.

3. Teorema di Fubini-Tonelli

Partiamo dal Teorema di Fubini per le funzioni integrabili.

Teorema 5.14 (Fubini). Siano $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ due spazi di misura σ-finiti, supponiamo che ν sia una misura completa, e sia $\mu \otimes \nu$ la misura prodotto su $X \times Y$. Se $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ allora:

i) La funzione $y \mapsto f(x,y)$ è ν-integrabile μ-quasi ogni $x \in X$.

ii) La funzione $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x,y) d\nu(y)$ è μ-integrabile.

iii) Si ha $\displaystyle\int_X \Big(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x,y) d\mu \otimes \nu.$

Dim. Caso I. Sopponiamo che $f : X \times Y \to [0, \infty)$ sia una funzione semplice non negativa

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{A_i}(x, y),$$

dove $c_i \geq 0$ e $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ con unione disgiunta e A_i insiemi $\mu \otimes \nu$-misurabili per ogni $i = 1, \ldots, n$. Poichè $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$, in considerazione del fatto che

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu \otimes \nu(A_i) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu < \infty$$

segue che $\mu \otimes \nu(A_i) < \infty$ quando $c_i > 0$.

Fissato $x \in X$ risulta $\chi_{A_i}(x, y) = \chi_{A_i^x}(y)$ e quest'ultima funzione è ν-misurabile per μ-q.o. x, per il teorema di riduzione. Dunque, anche la funzione

$$y \mapsto f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i^x}(y)$$

è misurabile per μ-q.o. $x \in X$, e poichè $\nu(A_i^x) < \infty$, si ha

$$\int_Y f(x, y) d\nu(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_Y \chi_{A_i^x}(y) d\nu(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \nu(A_i^x) < \infty.$$

Questo prova che $y \mapsto f(x, y)$ è ν-integrabile. Inoltre, dal teorema di riduzione segue che $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x, y) d\nu(y)$ è misurabile. Infine, si ha

$$\begin{aligned}
\int_X \Big(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \Big) d\mu(y) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \int_X \nu(A_i^x) d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu \otimes \nu(A_i) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu.
\end{aligned}$$

Caso II. Sia ora $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ una funzione non negativa. Esiste una successione crescente di funzioni semplici positive $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\varphi_n(x, y) \to f(x, y)$ per $n \to \infty$, per ogni punto $(x, y) \in X \times Y$.

Siccome $y \mapsto \varphi_n(x, y)$ è ν-misurabile per μ-q.o. $x \in X$, dalla convergenza puntuale segue che $y \mapsto f(x, y)$ è ν-misurabile per μ-q.o. $x \in X$. Inoltre, essendo la funzione

$$x \mapsto \int_Y \varphi_n(x, y) d\nu(y)$$

μ-misurabile, ed essendo per convergenza monotona

$$\lim_{n \to \infty} \int_Y \varphi_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y),$$

allora anche la funzione

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

è μ-misurabile. Infine, si ha

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu &= \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_n(x,y)d\mu\otimes\nu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X\Big(\int_Y\varphi_n(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x)\\ &= \int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x).\end{aligned}$$

Questo termina la dimostrazione nel Caso II.

Caso III. Se $f\in L^1(X\times Y,\mu\otimes\nu)$ è a valori reali, si scrive $f=f^+-f^-$ e si applica il Caso II separatamente alla parte positiva ed a quella negativa della funzione.

□

Osservazione 5.15. Se entrambe le misure μ e ν sono Σ-finite e complete, allora l'integrale sul prodotto può essere scritto come integrale ripetuto in entrambi gli ordini e si ottiene il teorema sullo scambio dell'ordine di integrazione

$$\int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x)=\int_Y\Big(\int_X f(x,y)d\mu(x)\Big)d\nu(y).$$

Con la stessa dimostrazione del Teorema di Fubini si prova la variante di Tonelli del teorema, per le funzioni misurabili positive.

Teorema 5.16 (Tonelli). Siano $(X,\mathscr{A},\mu)$ e $(Y,\mathscr{B},\nu)$ due spazi di misura σ-finiti, con ν-misura completa, e sia $\mu\otimes\nu$ la misura prodotto su $X\times Y$. Sia $f:X\times Y\to[0,\infty]$ una funzione $\mu\otimes\nu$-misurabile non negativa. Allora:

i) La funzione $y\mapsto f(x,y)$ è ν-misurabile per μ-quasi ogni $x\in X$.
ii) La funzione $x\mapsto\displaystyle\int_Y f(x,y)d\nu(y)$ è μ-misurabile.
iii) Si ha

$$\int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x)=\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu.$$

Possiamo omettere la dimostrazione.

Esercizio 5.17 (Integrale e sottografico). Sia $f\in L^1(X)$ una funzione non negativa. Il sottografico di f è il sottoinsieme di $X\times\mathbb{R}$

$$\Gamma_f=\{(x,t)\in X\times\mathbb{R}:0\le t<f(x)\}.$$

Consideriamo su $\mathbb{R}$ la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1$. Provare che risulta

$$\mu\otimes\mathscr{L}^1(\Gamma_f)=\int_X f(x)d\mu.$$

Esercizio 5.18 (Disuguaglianza di Minkowski integrale). Siano $(X,\mathscr{A},\mu)$ e $(Y,\mathscr{B},\nu)$ due spazi di misura σ-finiti con misure complete e sia $f:X\times Y\to[0,\infty]$ una funzione misurabile sullo spazio prodotto, non negativa. Provare che per $1\le p<\infty$ risulta

$$\Big(\int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\nu\Big)^p d\mu\Big)^{\frac1p}\le\int_Y\Big(\int_X f(x,y)^p d\mu\Big)^{\frac1p}d\nu.$$

La dimostrazione è analoga alla disuguaglianza di Minkowski "discreta". Si utilizza il Teorema di Fubini-Tonelli.

4. Convoluzione

Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ due funzioni $\mathscr{L}^n$-misurabili con proprietà di integrabilità da discutere. Se possibile, vogliamo definire il prodotto di convoluzione $f * g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Con il cambiamento di variabile $z = x - y$ si vede che

$$f * g = g * f,$$

ovvero il prodotto di convoluzione è commutativo.

Caso I. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora, per il Teorema di Tonelli si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx\, dy = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Caso II. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|f * g(x)|dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy\, dx \le \|f\|_1 \|g\|_\infty,$$

e dunque $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Caso III. Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$. Allora, per la disuguaguaglianza di Minkowski integrale si ha

$$\begin{aligned} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^p dx \Big)^{1/p} &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy \Big)^p dx \Big)^{1/p} \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p dx \Big)^{1/p} dy = \|f\|_1 \|g\|_p. \end{aligned}$$

In definitiva, i Casi I-III si riassumono nel seguente modo

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{5.3}$$

Caso IV. Ora supponiamo che sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1/p + 1/q = 1$. Con la disuguaglianza di Hölder si trova per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f*g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dy \Big)^{1/p} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q dy \Big)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q,$$

e quindi

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.4}$$

Le disuguaglianze (5.3) e (5.4) possono essere "interpolate" per ottenere una disuguaglianza più generale, nota come disuguaglianza di Young.

TEOREMA 5.19 (Young). Siano $1 \leq p, q < \infty$ e $1 \leq r \leq \infty$ tali che
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$
Allora si ha
$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_q \|g\|_p.$$

La dimostrazione di questo teorema è fuori dalla nostra portata, si veda Stein-Weiss, *Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*, Capitolo 5.

CAPITOLO 6

Teoremi di differenziazione

1. Teorema di Radon-Nikodym

In questa sezione presentiamo la dimostrazione di von Neumann del Teorema di Radon-Nikodym. Richiamiamo preliminarmente il Teorema di Riesz sugli operatori lineari continui su uno spazio di Hilbert.

Sia H uno spazio di Hilbert reale con prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un operatore lineare $T : H \to \mathbb{R}$ si dice limitato se esiste una costante $0 \leq C < \infty$ tale che $|T(x)| \leq C\|x\| = C\langle x, x\rangle^{1/2}$ per ogni $x \in H$.

Teorema 6.1. Sia $T : H \to \mathbb{R}$ un operatore lineare e limitato su uno spazio di Hilbert H con prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora esiste $x_0 \in H$ tale che $T(x) = \langle x, x_0\rangle$ per ogni $x \in H$.

Il Teorema di Riesz è parte del programma del Corso di Analisi Funzionale 1. Lo applicheremo per lo spazio di Hilbert $H = L^2(X)$. In effetti, questo teorema è il il teorema di dualità $L^2(X)^* = L^2(X)$, si veda il Teorema 4.8. Il Teorema di Radon-Nikodym stabilisce un legame preciso fra due misure, una assolutamente continua rispetto all'altra.

Definizione 6.2. Siano μ e ν due misure su $(X, \mathscr{A})$, dove $\mathscr{A}$ è una σ-algebra su X. Diciamo che ν è assolutamente continua rispetto a μ e scriviamo $\nu \ll \mu$ se per ogni $A \in \mathscr{A}$ la condizione $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$.

Teorema 6.3 (Radon-Nikodym). Siano μ e ν due misure σ-finite su $(X, \mathscr{A})$ e supponiamo che $\nu \ll \mu$. Esiste una funzione misurabile $h : X \to [0, \infty)$ non negativa tale che per ogni funzione misurabile $f : X \to [0, \infty)$ si ha

$$\int_X f(x)\, d\nu = \int_X f(x)\, h(x)\, d\mu.$$

Dim. Proviamo il teorema nel caso che μ e ν siano due misure finite su X. Definiamo la misura somma $\lambda = \mu + \nu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ponendo per ogni $A \in \mathscr{A}$

$$\lambda(A) = \mu(A) + \nu(A).$$

Osserviamo che per ogni funzione misurabile $f : X \to [0, \infty]$ si ha

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\, d\lambda &= \int_0^\infty \lambda(\{x \in X : f(x) > t\})dt \\ &= \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t\})dt + \int_0^\infty \nu(\{x \in X : f(x) > t\})dt \\ &= \int_X f(x)\, d\mu + \int_X f(x)\, d\nu.\end{aligned}$$

Definiamo l'operatore lineare $T : L^2(X;\lambda) \to \mathbb{R}$

$$T(f) = \int_X f(x)\, d\nu.$$

Proviamo che T è limitato. Per la disuguaglianza di Hölder si ha:

$$|T(f)| \le \int_X |f(x)|\, d\nu \le \nu(X)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_X |f(x)|^2\, d\nu \Big)^{\frac{1}{2}} \le \nu(X)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(X;\lambda)}.$$

Per il Teorema di Riesz esiste una funzione $g \in L^2(X;\lambda)$ tale che

$$\int_X f(x)\, d\nu = T(f) = \langle f, g\rangle_{L^2(X;\lambda)} = \int_X f(x)\, g(x)\, d\lambda$$

per ogni $f \in L^2(X;\lambda)$. Questa identità è equivalente a

$$\int_X f(x)(1-g(x))d\nu = \int_X f(x)g(x)d\mu. \tag{6.1}$$

Consideriamo l'insieme $A = \{x \in X : g(x) < 0\}$ e inseriamo nell'identità precedente la funzione $f = \chi_A \in L^2(X;\lambda)$:

$$\int_A (1-g(x))d\nu = \int_A g(x)d\mu.$$

L'integrale a sinistra è maggiore o uguale a 0. Se fosse $\mu(A) > 0$, quello a destra sarebbe strettamente negativo, assurdo. Quindi deve essere $\mu(A) = 0$ e per assoluta continuità anche $\nu(A) = 0$. Considerando invece l'insieme $B = \{x \in X : g(x) > 1\}$ e inserendo la funzione $f = \chi_B \in L^2(X;\lambda)$ l'integrale a sinistra è minore o uguale a 0. Se fosse $\mu(B) > 0$, quello a destra sarebbe strettamente positivo, assurdo. Quindi deve essere $\mu(B) = 0$ e per assoluta continuità anche $\nu(B) = 0$. Con $C = \{x \in X : g(x) = 1\}$ si deduce in modo analogo che $\mu(C) = \nu(C) = 0$. La conclusione è che si ha $0 \le g(x) < 1$ per ν-q.o. $x \in X$.

Per convergenza monotona, l'identità (6.1) si estende ora ad una qualsiasi funzione misurabile $f : X \to [0,\infty]$. Inserendo al posto di f in (6.1) la funzione $\frac{f}{1-g}$, dove $f \ge 0$ è una funzione misurabile, si trova la tesi

$$\int_X f(x)\, d\nu = \int_X f(x) \frac{g(x)}{1-g(x)}\, d\mu.$$

□

Osservazione 6.4. Nel Teorema 6.3, l'ipotesi che le misure siano σ-finite è necessaria. Si consideri $X = [0,1]$ con la σ-algebra $\mathscr{A}$ degli insiemi $\mathscr{L}^1$-misurabile, $\mu = \chi$ misura counting, e $\nu = \mathscr{L}^1$ misura di Lebesgue. Chiaramente $\mathscr{L}^1 \ll \chi$. Supponiamo che esista una funzione $h : [0,1] \to [0,\infty)$ misurabile tale che

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)h(x)d\chi$$

per ogni funzione misurabile $f \ge 0$. Non può essere $h(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$ e quindi esiste $x \in [0,1]$ tale che $h(x) > 0$. Allora con la funzione $f = \chi_{\{x\}}$ l'integrale a destra è strettamente positivo, mentro quello a sinistra è 0.

2. Misure di Radon in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Lusin

In questa sezione consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la struttura metrica e topologica standard.

DEFINIZIONE 6.5 (Misura di Radon). Una misura (esterna) $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ si dice di Radon se è di Borel regolare e per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si ha $\mu(K) < \infty$.

In particolare, la misura di Lebesgue è di Radon. Analogamente alla misura di Lebsgue si ha il seguente risultato.

TEOREMA 6.6. Sia μ una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$. Allora:

i) Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A,\, A \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto}\}.$$

ii) Per ogni insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\, K \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto}\}.$$

Per la prova si veda il Teorema 4 nella Sezione 1.1 di Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*.

TEOREMA 6.7 (Lusin). Siano μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione μ-misurabile ed $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme μ-misurabile tale che $\mu(A) < \infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme compatto $K \subset A$ tale che $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ ed $f : K \to \mathbb{R}$ è continua.

DIM. Senza perdere di generalità supponiamo che sia $f \geq 0$. Per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ sia $I_{ij} = [(i-1)/j, i/j)$. Gli insiemi $A_{ij} = A \cap f^{-1}(I_{ij})$ sono μ-misurabili in quanto f è μ-misurabile. Inoltre si ha $\mu(A_{ij}) < \infty$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, e

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{ij}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Per il Teorema 6.6 esistono degli insiemi compatti $K_{ij} \subset A_{ij}$ tali che

$$\mu(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i 2^j}.$$

Dal momento che

$$\begin{aligned}\mu\Big(A \setminus \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_{\ell j}\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_{\ell j}\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Big(A_{ij} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_{\ell j}\Big)\Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(A_{ij} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_{\ell j}\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^j},\end{aligned}$$

per il teorema di continuità della misura per intersezioni decrescenti esiste $n_j \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\Big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n_j} K_{ij}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

L'insieme $K_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} K_{ij}$ è compatto in quanto unione finita di compatti, e pertanto anche l'insieme

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$$

è compatto. Si ha

$$\mu(A \setminus K) = \mu\Big(A \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \setminus K_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \setminus K_j) < \varepsilon.$$

Proviamo che $f : K \to \mathbb{R}$ è continua. Si ha

$$f(K_j) = f\Big(\bigcup_{i=1}^{n_j} K_{ij}\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n_j} I_{ij}$$

dove $\operatorname{diam}(I_{ij}) \leq 1/j$. Consideriamo delle funzioni costanti a tratti $g_j : K_j \to \mathbb{R}$ tali che $g_j(x) = t_{ij} \in I_{mn}$ tutte le volte che $x \in K_{ij}$. Dal momento che gli insiemi K_{ij}, $i = 1, \dots, n_j$, sono compatti e disgiunti, le funzioni $g_j : K_j \to \mathbb{R}$ sono continue e inoltre

$$|f(x) - g_j(x)| \leq \frac{1}{j}$$

per tutti i punti $x \in K_j$. Dunque, la successione $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f su K e pertanto f è continua su K, essendo limite di funzioni continue. □

3. Differenziazione di misure di Radon in $\mathbb{R}^n$

In questa sezione indichiamo con $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| \leq r\}$ la palla Euclidea *chiusa* di raggio $r > 0$ e centro $x \in \mathbb{R}^n$.

Siano $\mu, \nu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ due misure di Radon su $\mathbb{R}^n$. Definiamo la derivata inferiore e superiore di ν rispetto a μ nel seguente modo:

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \liminf\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & \text{se } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ per ogni } r > 0 \\ \infty & \text{se } \mu(B(x,r)) = 0 \text{ per qualche } r > 0, \end{cases}$$

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \begin{cases} \limsup\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & \text{se } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ per ogni } r > 0 \\ \infty & \text{se } \mu(B(x,r)) = 0 \text{ per qualche } r > 0. \end{cases}$$

Definizione 6.8. La misura ν si dice differenziabile rispetto a μ nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ se risulta $\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty$. In questo caso il valore comune si indica con $D_\mu \nu(x)$, la derivata di ν rispetto a μ in x.

Teorema 6.9 (Differenziazione). Siano μ, ν due misure di Radon su $\mathbb{R}^n$. Allora la derivata $D_\mu \nu(x)$ esiste finita per μ-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed è una funzione μ-misurabile.

Dim. La dimostrazione si basa sul seguente risultato preliminare.

Lemma 6.10 (di confronto). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme ed $\alpha \geq 0$. Allora:

i) $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}_\mu \nu(x) \leq \alpha\} \Rightarrow \nu(A) \leq \alpha\mu(A)$;
ii) $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\} \Rightarrow \nu(A) \geq \alpha\mu(A)$.

Posponiamo la dimostrazione del Lemma di confronto.

Non è restrittivo supporre che $\mu(\mathbb{R}^n), \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Consideriamo l'insieme dei punti dove la derivata superiore è infinita:

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}_\mu \nu(x) = \infty\}.$$

Dal momennto che $I \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}_\mu\nu(x) \geq \alpha\}$ per ogni $\alpha \geq 0$, per il Lemma di confronto si ha $\nu(I) \geq \alpha\mu(I)$ per ogni $\alpha \geq 0$. Questo implica che $\mu(I) = 0$.

Ora fissiamo $a, b \in \mathbb{Q}^+$ con $a < b$ e consideriamo l'insieme

$$R(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}_\mu\nu(x) \leq a < b \leq \overline{D}_\mu\nu(x) < \infty\}.$$

Per il Lemma di confronto si ha

$$\nu(R(a,b)) \leq a\mu(R(a,b)) \leq b\mu(R(a,b)) \leq \nu(R(a,b)),$$

e dunque si hanno tutte uguaglianze e pertanto $\mu(R(a,b)) = 0$, perchè $a < b$. Poi, osserviamo che, ignorato l'insieme I, si ha

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \text{non esiste finita } D_\mu\nu(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}_\mu\nu(x) < \overline{D}_\mu\nu(x)\} = \bigcup_{0<a<b} R(a,b),$$

con $a, b \in \mathbb{Q}$, e dunque

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \text{non esiste finita } D_\mu\nu(x)\}) \leq \sum_{0<a<b} \mu(R(a,b)) = 0,$$

con somma per $a, b \in \mathbb{Q}$. Questo prova l'esistenza finita della derivata $D_\mu\nu(x)$ per μ-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Mostriamo che la funzione $x \mapsto D_\mu\nu(x)$ è μ-misurabile. Dal momento che si ha

$$D_\mu\nu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))},$$

è sufficiente provare che le due funzioni $x \mapsto \mu(B(x,r))$ ed $x \mapsto \nu(B(x,r))$ sono μ-misurabili. Essendo le palle $B(x,r)$ chiuse, si ha la semicontinuità superiore

$$\limsup_{y\to x} \chi_{B(y,r)}(z) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{0<|y-x|<\delta} \chi_{B(y,r)}(z) \leq \chi_{B(x,r)}(z), \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Quando $z \in B(x,r)$ la disuguaglianza è chiara. Quando $z \in \mathbb{R}^n \setminus B(x,r)$ allora $\chi_{B(x,r)}(z) = 0$ ed in particolare $|z-x| > r$. Se $0 < \delta < |z-x| - r$ e $|y-x| < \delta$, allora

$$|z-y| \geq |z-x| - |x-y| > |z-x| - \delta > r$$

e quindi $\chi_{B(y,r)}(z) = 0$. Anche in questo caso la disuguaglianza è verificata (esiste proprio il limite).

Ora con il lemma di Fatou si trova

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbb{R}^n) - \mu(B(x,r)) &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \chi_{B(x,r)}(z))d\mu \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{y\to x}(1 - \chi_{B(y,r)}(z))d\mu \\
&\leq \liminf_{y\to x} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \chi_{B(y,r)}(z))d\mu \\
&= \mu(\mathbb{R}^n) - \limsup_{y\to x} \mu(B(y,r)),
\end{aligned}$$

e quindi

$$\limsup_{y\to x} \mu(B(y,r) \leq \mu(B(x,r)).$$

Questo prova che la funzione $x \mapsto f(x) = \mu(B(x,r))$ è semicontinua superiormente, ovvero gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$ sono aperti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, dunque Boreliani e dunque μ-misurabili. Un argomento del tutto analogo vale per la funzione $x \mapsto \nu(B(x,r))$. $\square$

Per le misure di Radon in $\mathbb{R}^n$ il Teorema di Radon-Nikodym assume la seguente più precisa forma, che potremmo chiamare *forma geometrica*.

Teorema 6.11 (Radon-Nikodym). Siano $\mu, \nu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ due misure di Radon su $\mathbb{R}^n$ tali che $\nu \ll \mu$. Allora, per ogni insieme μ-misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$, si ha

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu(x) d\mu.$$

Dim. Osserviamo preliminarmente che A è ν-misurabile. Infatti, esiste un insieme di Borel B contenente A tale che $\mu(B \setminus A) = 0$. Per l'assolutà continuità $\nu \ll \mu$, $B \setminus A$ è ν-misurabile e dunque lo è anche A.

Non è restrittivo supporre che $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ e $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned} Z &= \{x \in \mathbb{R}^n : D_\mu\nu(x) = 0\}, \\ I &= \{x \in \mathbb{R}^n : D_\mu\nu(x) = \infty\}, \\ N &= \{x \in \mathbb{R}^n : D_\mu\nu(x) \text{ non esiste}\}. \end{aligned}$$

Sappiamo che $\mu(I) = \mu(N) = 0$ e dunque per l'assoluta continuità di ν rispetto a μ sarà anche $\nu(I) = \nu(N) = 0$. Inoltre $Z \subset \{x \in \mathbb{R}^n : D_\mu\nu(x) \leq \alpha\}$ per ogni $\alpha \geq 0$, e dunque $\nu(Z) \leq \alpha\mu(Z)$ per ogni α. Quindi è necessariamente $\nu(Z) = 0$, e dunque

$$\nu(Z) = 0 = \int_Z D_\mu\nu(x) d\mu, \quad \nu(I) = 0 = \int_I D_\mu\nu(x) d\mu.$$

Con questo, il teorema risulta provato nel caso che $A \subset I \cup Z \cup N$. Si può dunque supporre che sia $A \subset \mathbb{R}^n \setminus I \cup Z \cup N$.

Fissato $t > 1$, definiamo per ogni $k \in \mathbb{Z}$ gli insiemi

$$A_k = \{x \in A : t^{k-1} \leq D_\mu\nu(x) < t^k\}.$$

Per il Lemma di confronto si ha

$$\nu(A_k) \leq t^k \mu(A_k), \quad \nu(A_k) \geq t^{k-1}\mu(A_k).$$

Dal momento che $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ con unione disgiunta, si può scrivere

$$\begin{aligned} \int_A D_\mu\nu(x) d\mu &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_k} D_\mu\nu(x) d\mu \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^k \mu(A_k) \\ &= t \sum_{k\in\mathbb{Z}} t^{k-1}\mu(A_k) \leq t \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu(A_k) = t\nu(A), \end{aligned}$$

e in modo analogo si stima $\displaystyle\int_A D_\mu\nu(x) d\mu \geq t^{-1}\nu(A)$. In conclusione, per ogni $t > 1$ si ha

$$\frac{1}{t}\,\nu(A) \leq \int_A D_\mu\nu(x) d\mu \leq t\,\nu(A),$$

e dunque per $t \to 1^+$ si trova la tesi. $\square$

Per provare il lemma di confronto occorre un lemma di ricoprimento. Il teorema che sta alla base della dimostrazione è il lemma di ricoprimento di Besicovitch.

TEOREMA 6.12. Esiste una costante dimensionale $N > 0$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ con questa proprietà. Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di palle chiuse non degeneri di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\sup\big\{\mathrm{diam}(B) \,:\, B \in \mathscr{F}\big\} < \infty,$$

e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme dei centri delle palle.

Allora esistono sottofamiglie $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_N \subset \mathscr{F}$, con ogni $\mathscr{G}_i$ numerabile e disgiunta per $i = 1, \ldots, N$, tali che

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{B \in \mathscr{G}_i} B.$$

La dimostrazione di questo teorema è elementare ma complessa, e viene omessa. Si veda Evans-Gariepy. Una conseguenza è il teorema sul *ricoprimento fine* di Vitali.

TEOREMA 6.13. Siano $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ una misura di Borel su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathscr{F}$ una famiglia di palle chiuse non degeneri di $\mathbb{R}^n$. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme dei centri, supponiamo che $\mu(A) < \infty$ e che per ogni $x \in A$ sia

$$\inf\big\{r > 0 \,:\, B(x, r) \in \mathscr{F}\big\} = 0.$$

Allora per ogni insieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ esiste una sottofamiglia numerabile e disgiunta $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ tale che

$$\mu\Big((A \cap U) \setminus \bigcup_{B \in \mathscr{G}} B\Big) = 0 \quad \text{e} \quad \bigcup_{B \in \mathscr{G}} B \subset U.$$

Nella dimostrazione si usa il Teorema di Besicovitch, ed è omessa.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 6.10. Proviamo la parte i). Sia

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{D}_\mu \nu(x) \leq \alpha\}$$

per qualche $\alpha \geq 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ ed un insieme aperto U contenente A. La famiglia di palle

$$\mathscr{F} = \{B(x, r) : x \in A,\, \nu(B(x, r)) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(B(x, r)),\, B(x, r) \subset U\},$$

è un ricoprimento fine di Vitali di A perchè $\underline{D}_\mu \nu(x) < \alpha + \varepsilon$. Per il Teorema 6.13 esiste un sottoricoprimento numerabile e disgiunto $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ tale che

$$\bigcup_{B \in \mathscr{G}} B \subset U \quad \text{e} \quad \nu\Big(A \setminus \bigcup_{B \in \mathscr{G}} B\Big) = 0.$$

Dunque, si ha

$$\begin{aligned}\nu(A) &\leq \nu\Big(\bigcup_{B \in \mathscr{G}} B\Big) = \sum_{B \in \mathscr{G}} \nu(B) \\ &\leq (\alpha + \varepsilon) \sum_{B \in \mathscr{G}} \mu(B) = (\alpha + \varepsilon)\mu\Big(\bigcup_{B \in \mathscr{G}} B\Big) \leq (\alpha + \varepsilon)\mu(U).\end{aligned}$$

Dalla arbitrarietà di ε si ottiene $\nu(A) \leq \alpha\mu(U)$ e dal Teorema 6.6 si ottiene la tesi. □

4. Teorema di differenziazione di Lebesgue

In questa sezione consideriamo la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, ma risultati analoghi valgono per una misura di Radon.

Teorema 6.14. Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora per $\mathscr{L}^n$-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x).$$

Dim. Senza perdere di generalità possiamo supporre che sia $f \geq 0$ su $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathscr{M}$ la σ-algebra degli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili e definiamo la misura $\nu : \mathscr{M} \to [0,\infty]$

$$\nu(A) = \int_A f(y)dy, \quad A \in \mathscr{M}.$$

Allora ν è una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$ (i dettagli sono omessi) ed inoltre $\nu \ll \mu = \mathscr{L}^n$. Per il Teorema 6.11, dato un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\int_A f(y)dy = \nu(A) = \int_A D_\mu \nu(y)dy,$$

e dunque per $\mathscr{L}^n$-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$f(x) = D_\mu\nu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy.$$

□

Corollario 6.15. Sia $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora $\mathscr{L}^n$-per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy = 0. \tag{6.2}$$

Dim. Sia $\{q_i \in \mathbb{R} : i \in \mathbb{N}\}$ un insieme denso in $\mathbb{R}$. Esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ e per ogni $x \in A$ ed $i \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p dy = |f(x) - q_i|^p.$$

Dato $\varepsilon > 0$ esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $|f(x) - q_i|^p < \varepsilon$. Dunque si trova

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy &\leq \limsup_{r\to 0^+} C_p\Big(\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p dy + |f(x) - q_i|^p\Big)\\ &\leq C_p\varepsilon,\end{aligned}$$

ed essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario la tesi segue. □

Definizione 6.16 (Punto di Lebesgue). Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0$$

si dice *punto di Lebesgue* di f.

Corollario 6.17. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile. Allora $\mathscr{L}^n$-per q.o. $x \in E$ si ha

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathscr{L}^n(E \cap B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} = 1, \tag{6.3}$$

e per $\mathscr{L}^n$-per q.o. $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ si ha

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathscr{L}^n(E \cap B(x,r))}{\mathscr{L}^n(B(x,r))} = 0. \tag{6.4}$$

Definizione 6.18 (Punti di densità 1 e 0). Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tale che vale (6.3) si dice punto di densità 1 di E. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tale che vale (6.4) si dice punto di densità 0.

5. Teorema di decomposizione delle misure di Radon

Non ci sarà tempo di fare questa sezione.

Definizione 6.19. Diciamo che due misure di Borel μ e ν su $\mathbb{R}^n$ sono mutulmente singolari, e scriviamo $\nu \perp \mu$, se esiste un insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \nu(B) = 0$.

Teorema 6.20 (Decomposizione delle misure di Radon). Siano μ, ν due misure di Radon su $\mathbb{R}^n$. Esistono due misure di Radon ν_{ac}, ν_s tali che $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, $\nu_{ac} \ll \mu$ e $\nu_s \perp \mu$. Inoltre $D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac}$.

Dim. Affinchè risulti $\nu_{ac} \ll \mu$ si deve avere l'implicazione

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu_{ac}(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0,$$

e dunque il supporto di ν_{ac} deve essere concentrato nel "più piccolo" insieme A che verifica l'antecedente. Dunque poniamo

$$\mathscr{B} = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ insieme di Borel}, \ \mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $A_k \in \mathscr{B}$ tale che

$$\inf_{A \in \mathscr{B}} \nu(A) + \frac{1}{k} \geq \nu(A_k).$$

Se definiamo $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ si ottiene un insieme boreliano che verifica per $k \in \mathbb{N}$

$$\nu(B) \leq \nu(A_k) \leq \inf_{A \in \mathscr{B}} \nu(A) + \frac{1}{k},$$

e dunque, $\nu(B) \leq \inf_{A \in \mathscr{B}} \nu(A)$. D'altra parte

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \mu(\mathbb{R}^n \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k') = \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n \setminus A_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\mathbb{R}^n \setminus A_k) = 0,$$

e dunque $B \in \mathscr{B}$ e pertanto $\nu(B) = \min_{A \in \mathscr{B}} \nu(A)$.

Definiamo le misure

$$\nu_{ac}(A) = \nu(A \cap B), \quad \nu_s(A) = \nu(A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)).$$

Essendo restrizioni su boreliani di misure di Radon, ν_{ac} e ν_s sono anch'esse di Radon. Mostriamo che $\nu_{ac} \ll \mu$. Se $\mu(A) = 0$, allora $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathscr{B}$ e dal momento che $\mathscr{B}$ è chiuso per intersezioni anche $A' \cap B \in \mathscr{B}$, per cui $\nu(A' \cap B) \geq \nu(B)$. Quindi

$$\nu_{ac}(A) = \nu(A \cap B) = \nu(B) - \nu(A' \cap B) \leq 0.$$

Inoltre è immediato verificare che $\nu_s \perp \mu$, infatti $\nu_s(B) = \nu(B \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)) = 0$ e $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$.

Infine, dal momento che $D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac} + D_\mu \nu_s$, l'ultima affermazione del teorema segue se si mostra che $D_\mu \nu_s(x) = 0$ per $\mu-$quasi ogni x. Posto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : D_\mu \nu_s(x) \geq \alpha\}$ con $\alpha > 0$, per il Lemma 6.10 si ha

$$\nu_s(A) \geq \alpha \mu(A),$$

da cui si deduce che $\mu(A) = 0$. $\square$

CAPITOLO 7

Funzioni a variazione limitata ed assolutamente continue

In questo capitolo consideriamo funzioni definite sull'intervallo $[0,1]$. Le definizioni e i risultati si possono riformulare per funzioni definite su intervalli $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$ ed anche su intervalli non limitati.

1. Funzioni a variazione limitata

In questa sezione introduciamo la definizione *puntuale* di funzione a variazione limitata. Nella Sezione 5 vedremo la definizione *distribuzionale*.

Indichiamo con $\mathscr{S}([0,1])$ l'insieme delle suddivisioni σ dell'intervallo $[0,1]$. Con abuso di notazione, indicheremo una suddivisione con $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$, per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 7.1. Definiamo la *variazione totale* di una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nel seguente modo

$$\mathrm{V}_{[0,1]}(f) = \sup_{\sigma \in \mathscr{S}([0,1])} \sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \tag{7.1}$$

Se $\mathrm{V}_{[0,1]}(f) < \infty$ diremo che f è a variazione totale limitata e scriveremo $f \in BV([0,1])$. Per semplicità porremo anche $\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}_{[0,1]}(f)$.

La variazione totale si può definire per funzioni a valori in uno spazio metrico (X,d). Nella (7.1) si sostituisce la distanza $|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ con $d(f(x_i), f(x_{i-1}))$.

Osservazione 7.2. Useremo nel seguito le seguenti proprietà, di facile verifica.

1) La variazione totale è subadditiva. Precisamente, date due funzioni $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ si ha
$$\mathrm{V}(f+g) \le \mathrm{V}(f) + \mathrm{V}(g).$$
2) La variazione totale è additiva rispetto a scomposizioni del dominio. Precisamente, per ogni punto $x \in [0,1]$ si ha
$$\mathrm{V}_{[0,1]}(f) = \mathrm{V}_{[0,x]}(f) + \mathrm{V}_{[x,1]}(f).$$

Esempio 7.3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, ad esempio crescente. Allora per ogni $\sigma \in \mathscr{S}([0,1])$ si ha

$$\sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{x_i \in \sigma} f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(1) - f(0),$$

e dunque $\mathrm{V}(f) = f(1) - f(0) < \infty$.

Esempio 7.4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana, ovvero esista una costante $0 \leq L < \infty$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ per ogni $x, y \in [0,1]$. Allora per ogni $\sigma \in \mathscr{S}([0,1])$ si ha

$$\sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{x_i \in \sigma} L|x_i - x_{i-1}| = L,$$

e dunque $\mathrm{V}(f) \leq L < \infty$.

Esercizio 7.5. Provare che se $f \in C^1([0,1])$ allora $f \in BV([0,1])$ e inoltre

$$\mathrm{V}_{[0,1]}(f) = \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

Definiamo le variazioni positiva e negativa di una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}^+_{[0,1]}(f) &= \sup_{\sigma \in \mathscr{S}([0,1])} \sum_{x_i \in \sigma} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \\
&= \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in \mathscr{S}([0,1])} \sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + (f(x_i) - f(x_{i-1})) \qquad (7.2)\\
&= \frac{1}{2}\big(\mathrm{V}_{[0,1]}(f) + f(1) - f(0)\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}^-_{[0,1]}(f) &= \sup_{\sigma \in \mathscr{S}([0,1])} \sum_{x_i \in \sigma} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \\
&= \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in \mathscr{S}([0,1])} \sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| - (f(x_i) - f(x_{i-1})) \qquad (7.3)\\
&= \frac{1}{2}\big(\mathrm{V}_{[0,1]}(f) - (f(1) - f(0))\big).
\end{aligned}$$

Dunque, le variazioni positiva e negativa verificano le seguenti identità:

$$\mathrm{V}^+_{[0,1]}(f) + \mathrm{V}^-_{[0,1]}(f) = \mathrm{V}_{[0,1]}(f), \tag{7.4}$$

$$\mathrm{V}^+_{[0,1]}(f) - \mathrm{V}^-_{[0,1]}(f) = f(1) - f(0). \tag{7.5}$$

Teorema 7.6 (Jordan). Per ogni funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sono equivalenti:

A) $f \in BV([0,1])$.
B) Esistono due funzioni $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotone crescenti tali che $f = \varphi - \psi$.

Dim. B)⇒A) Questa implicazione è semplice, in quanto

$$\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}(\varphi - \psi) \leq \mathrm{V}(\varphi) + \mathrm{V}(-\psi) = \mathrm{V}(\varphi) + \mathrm{V}(\psi) < \infty.$$

A)⇒B) Definiamo le due funzioni $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = f(0) + \mathrm{V}^+_{[0,x]}(f), \quad \psi(x) = \mathrm{V}^-_{[0,x]}(f), \quad x \in [0,1].$$

Le funzioni φ e ψ sono crescenti. Inoltre, dalle osservazioni fatte prima dell'enunciato del teorema si ha, per ogni $x \in [0,1]$,

$$f(x) = f(0) + \mathrm{V}^+_{[0,x]}(f) - \mathrm{V}^-_{[0,x]}(f) = \varphi(x) - \psi(x).$$

□

Un caso particolare del teorema di differenziazione di misure è il Teorema di Lebesgue sulla derivabilità q.o. delle funzioni monotone.

Teorema 7.7 (Lebesgue). Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$ esiste la derivata

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Vedremo che ad ogni funzione crescente su $[0,1]$ è associata una misura di Borel μ. L'esistenza della derivata di f equivale all'esistenza della derivata di μ rispetto alla misura di Lebesgue. Nell'Appendice 6, presentiamo la dimostrazione di Riesz-Nagy del Teorema di Lebesgue.

Corollario 7.8. Se $f \in BV([0,1])$ è una funzione a variazione limitata, allora:

i) f è continua al di fuori di un insieme al più numerabile di punti.
ii) f è derivabile in $\mathscr{L}^1$-q.o. punto $x \in [0,1]$.

Dim. La dimostrazione discende dal Teorema di Jordan e dalle analoghe proprietà delle funzioni monotone. □

Data una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ scriveremo, se i limiti esistono,

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

Teorema 7.9. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora si ha $f' \in L^1([0,1])$ e inoltre

$$\int_{[0,1]} f'(x)dx \le f(1^-) - f(0^+). \tag{7.6}$$

Dim. Sappiamo che $f'(x)$ esiste per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$. Che f' sia una funzione misurabile deriva dal fatto che i rapporti incrementali sono misurabili, come funzioni del punto ad incremento fissato.

Conveniamo di prolungare f a destra di 1 con $f(1)$, cioè sia $f(x) = f(1)$ per $x \ge 1$. Per $\delta > 0$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} dx &= \frac{1}{\delta}\Big(\int_\delta^{1+\delta} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \Big) \\ &= \frac{1}{\delta}\Big(\int_1^{1+\delta} f(x)dx - \int_0^\delta f(x)dx \Big) \le f(1) - f(0).\end{aligned}$$

Nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato (in modo non essenziale) il fatto che f è crescente.

Siccome f è crescente, i rapporti incrementali oltre ad essere misurabili sono anche non negativi. Possiamo usare il Lemma di Fatou ed ottenere

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)dx &= \int_0^1 \lim_{\delta \to 0^+} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} dx \\ &\le \liminf_{\delta \to 0^+} \int_0^1 \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} dx \le f(1) - f(0) < \infty.\end{aligned}$$

Questo prova che $f' \in L^1([0,1])$. Infine, per ogni $0 < \varepsilon < 1/2$ si ha

$$\int_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} f'(x)dx \leq f(1-\varepsilon) - f(\varepsilon),$$

e per $\varepsilon \to 0^+$ si trova la tesi come enunciata nel teorema. $\square$

Corollario 7.10. Sia $f \in BV([0,1])$ una funzione a variazione limitata. Allora si ha

$$\int_{[0,1]} |f'(x)|dx \leq \mathrm{V}_{[0^+,1^-]}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{V}_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}(f).$$

Dim. Come nella dimostrazione del Teorema di Jordan, si ha per ogni $x \in [0,1]$

$$f(x) = f(0) + \mathrm{V}^+_{[0,x]}(f) - \mathrm{V}^-_{[0,x]}(f).$$

Le variazioni positiva e negativa sono derivabili quasi ovunque, con derivata non negativa. Dunque, per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \Big|\frac{d}{dx}\mathrm{V}^+_{[0,x]}(f) - \frac{d}{dx}\mathrm{V}^-_{[0,x]}(f)\Big| \leq \Big|\frac{d}{dx}\mathrm{V}^+_{[0,x]}(f)\Big| + \Big|\frac{d}{dx}\mathrm{V}^-_{[0,x]}(f)\Big| \\ &= \frac{d}{dx}\mathrm{V}^+_{[0,x]}(f) + \frac{d}{dx}\mathrm{V}^-_{[0,x]}(f) \\ &= \frac{d}{dx}\Big(\mathrm{V}^+_{[0,x]}(f) + \mathrm{V}^-_{[0,x]}(f)\Big) \\ &= \frac{d}{dx}\mathrm{V}_{[0,x]}(f). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Integrando tali disuguaglianze e usando il Teorema 7.9, si trova

$$\int_0^1 |f'(x)|dx \leq \int_0^1 \frac{d}{dx}\mathrm{V}_{[0,x]}(f)dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{V}_{[0,1-\varepsilon]}(f) - \mathrm{V}_{[0,\varepsilon]}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{V}_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}(f).$$

$\square$

Osservazione 7.11. La funzione di Cantor-Vitali $f : [0,1] \to [0,1]$ è crescente e dunque $f \in BV([0,1])$, inoltre si ha

$$\mathrm{V}(f) = f(1) - f(0) = 1.$$

D'altra parte, sappiamo che $f'(x) = 0$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$. Dunque, si ha la disuguaglianza stretta

$$\int_{[0,1]} |f'(x)|dx = 0 < 1 = \mathrm{V}(f).$$

2. Funzioni assolutamente continue

In questa sezione introduciamo la definizione di funzione assolutamente continua e proviamo il Teorema fondamentale del calcolo integrale per tali funzioni. Nella Sezione 5 vedremo una definizione equivalente di tipo distribuzionale.

Definizione 7.12. Una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua*, $f \in AC([0,1])$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| \le \varepsilon,$$

per ogni scelta di $n \in \mathbb{N}$ intervalli disgiunti (α_i, β_i) contenuti in $[0,1]$.

Le funzioni assolutamente continue sono chiaramente continue. Proviamo che sono anche a variazione limitata.

Teorema 7.13. Se $f \in AC([0,1])$ allora $f \in BV([0,1])$.

Dim. Fissato $\varepsilon = 1$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| \le 1,$$

dove gli $n \in \mathbb{N}$ intervalli (α_i, β_i) sono disgiunti. In corrispondenza di questo δ, scegliamo a nostro piacere una suddivisione $\tau = \{0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$ tale che $0 < y_j - y_{j-1} \le \delta$ per ogni $j = 1, \ldots, N$. Il numero N dipende da δ.

Sia ora $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = 1\}$, con $k \in \mathbb{N}$, una generica suddivisione dell'intervallo $[0,1]$ e consideriamo la suddivisione unione $\sigma \cup \tau$. Per ogni $j = 1, \ldots, N$ avremo

$$[y_{j-i}, y_j] = \bigcup_{i=1}^{k_j} [z_{i-1}^j, z_i^j]$$

con $z_i \in \sigma \cup \tau$ e $y_{j-1} = z_0^j < z_1^j < \ldots < z_{k_j}^j = y_j$. Dunque, le somme su σ si stimano nel seguente modo

$$\sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{z_i \in \sigma \cup \tau} |f(z_i) - f(z_{i-1})| = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{k_j} |f(z_{i-1}^j) - f(z_i^j)| \le N,$$

e dunque con il sup su $\sigma \in \mathscr{S}([0,1])$ si deduce che $\mathrm{V}(f) \le N$. $\square$

Definizione 7.14. Diciamo che una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ha la *proprietà di Lusin* se per ogni insieme $\mathscr{L}^1$-misurabile $E \subset [0,1]$ si ha

$$\mathscr{L}^1(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}^1(f(E)) = 0.$$

Esercizio 7.15. Provare che le funzioni assolutamente continue hanno la proprietà di Lusin.

Prossimo obiettivo è di verificare che le funzioni assolutamente continue verificano il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Lemma 7.16. Se $f \in AC([0,1])$ allora la funzione $x \mapsto F(x) = \mathrm{V}_{[0,x]}(f)$ è assolutamente continua su $[0,1]$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| \le \varepsilon,$$

con intervalli (α_i, β_i) disgiunti, $i = 1, \dots, n$.

Sia $\sigma_i \in \mathscr{S}[\alpha_i, \beta_i])$ una suddivisione dell'intervallo $[\alpha_i, \beta_i]$. Allora si ha

$$\sum_{i=1}^n \sum_{x_j \in \sigma_i} |x_j - x_{j-1}| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \sum_{x_j \in \sigma_i} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \varepsilon.$$

Passando al sup sulle suddivisioni σ_i si trova

$$\sum_{i=1}^n |F(\alpha_i) - F(\beta_i)| = \sum_{i=1}^n \mathrm{V}_{[\alpha_i, \beta_i]}(f) \leq \varepsilon.$$

Questo prova che la variazione è assolutamente continua. □

Lemma 7.17. Se $f \in AC([0,1])$ allora esistono due funzioni $\varphi, \psi \in AC([0,1])$ crescenti tali che $f = \varphi - \psi$.

Dim. Poichè $f \in BV([0,1])$, per ogni $x \in [0,1]$ avremo

$$f(x) = f(0) + \mathrm{V}^+_{[0,x]}(f) - \mathrm{V}^-_{[0,x]}(f) = \varphi(x) - \psi(x),$$

dove, per il Lemma 7.16, si ha

$$\varphi(x) = f(0) + \mathrm{V}^+_{[0,x]}(f) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_{[0,x]}(f) + f(x) + f(0)\Big) \in AC([0,1])$$
$$\psi(x) = \mathrm{V}^-_{[0,x]}(f) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{V}_{[0,x]}(f) - f(x) + f(0)\Big) \in AC([0,1]).$$

□

Teorema 7.18 (Teorema fondamentale del calcolo). Se $f \in AC([0,1])$ allora si ha $f' \in L^1([0,1])$ e inoltre

$$f(1) - f(0) = \int_{[0,1]} f'(x)dx.$$

Dim. Per il Lemma 7.17 si può supporre che f sia crescente. Prolunghiamo in modo naturale $f(x) = f(0)$ per $x \leq 0$ ed $f(x) = f(1)$ per $x \geq 1$.

Per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$ esiste la derivata

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x),$$

e inoltre per il Teorema 7.9 si ha $f' \in L^1([0,1])$. Dalla continuità di f segue che

$$\lim_{t \to 0} \int_{[0,1]} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dx = f(1) - f(0).$$

Dunque, il teorema sarà provato giustificando il seguente passaggio al limite sotto segno di integrale

$$\lim_{t \to 0} \int_{[0,1]} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dx = \int_{[0,1]} \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dx.$$

Sia $\delta > 0$ un parametro da fissare in seguito. Per il Teorema di Egorov esiste un insieme misurabile $K \subset (0,1)$ tale che $\mathscr{L}^1\big((0,1) \setminus K\big) < \delta$ e

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x)$$

con convergenza uniforme per $x \in K$. Possiamo anche supporre che K sia compatto.

Sia $\varepsilon > 0$ e proviamo che esiste $\delta > 0$ tale che se $\mathscr{L}^1([0,1] \setminus K) < \delta$ allora si ha

$$\int_{[0,1]\setminus K} f'(x)dx \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \sup_{t\neq 0} \int_{[0,1]\setminus K} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}dx \leq \varepsilon.$$

Poichè $f' \in L^1([0,1])$, la stima a sinistra segue dall'assoluta continuità dell'integrale rispetto alla misura del dominio di integrazione.

Proviamo la stima a destra. L'insieme $(0,1) \setminus K$ è aperto e dunque è l'unione disgiunta di una famiglia (al più) numerabile di intervalli aperti:

$$(0,1) \setminus K = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i),$$

e dunque

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i - \alpha_i| = \mathscr{L}^1([0,1] \setminus K) < \delta.$$

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}dx &= \frac{1}{t}\Big(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x+t)dx - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x)dx\Big) \\
&= \frac{1}{t}\Big(\int_{\alpha_i+t}^{\beta_i+t} f(x)dx - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x)dx\Big) \\
&= \frac{1}{t}\int_{\beta_i}^{\beta_i+t} f(x)dx - \frac{1}{t}\int_{\alpha_i}^{\alpha_i+t} f(x)dx \\
&= \frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(x+\beta_i)dx - \frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(x+\alpha_i)dx
\end{aligned}$$

e dunque per l'assoluta continuità di f si ottiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}dx = \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} (f(x+\beta_i) - f(x+\alpha_i))dx \leq \varepsilon,$$

con stima uniforme rispetto a $t \neq 0$. Questo termina la dimostrazione. □

Esempio 7.19. Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\log(x/2)} \cos\Big(\dfrac{1}{x}\Big) & x \in (0,1], \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La funzione è derivabile in tutti i punti $x \in [0,1]$, anche in $x = 0$ con $f'(0) = 0$. Per $x \neq 0$ la derivata è

$$f'(x) = \frac{\log(2/x) - 1}{\log^2(2/x)} \cos\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{x\log(x/2)} \sin\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Tuttavia si ha (i conti sono lasciati al lettore)

$$\frac{1}{x\log(x/2)} \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) \notin L^1(0,1),$$

e dunque f non è assolutamente continua.

In conclusione, esistono funzioni derivabili in *tutti* i punti per cui non vale il Teorema fondamentale del calcolo integrale formulato tramite l'integrale di Lebesgue.

Esercizio 7.20. Sia $f \in C([0,1]) \cap C^1(]0,1])$ una funzione tale che $f' \in L^1(0,1)$. Provare che f è assolutamente continua su $[0,1]$.

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale si può invertire, nel seguente senso.

Corollario 7.21. Se $g \in L^1([0,1])$ allora la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi, \quad x \in [0,1], \tag{7.8}$$

è assolutamente continua su $[0,1]$ e inoltre $f'(x) = g(x)$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$.

Dim. Per l'assoluta continuità dell'integrale risulta $f \in AC([0,1])$. Inoltre, per il Teorema di differenziazione di Lebesgue per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$ esiste la derivata

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} g(\xi)d\xi = g(x).$$

$\square$

Un primo legame fra funzione assolutamente continue e a variazione limitata è descritto nel seguente teorema. Si veda anche il Teorema 7.35.

Teorema 7.22. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) $f \in AC([0,1])$.

B) $f \in BV([0,1])$ e $\displaystyle\int_{[0,1]} |f'(x)|dx = \mathrm{V}_{[0,1]}(f)$.

Dim. A)⇒B) Se $f \in AC([0,1])$ allora $f \in BV([0,1])$, per il Teorema 7.13. Inoltre per il Corollario 7.10 si ha la maggiorazione

$$\int_{[0,1]} |f'(x)|dx \le \mathrm{V}_{[0,1]}(f).$$

Per ottenere la tesi occorre provare la maggiorazione opposta. Usando il Teorema 7.18 si trova

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(\xi)d\xi = \int_0^x f'^+(\xi)d\xi - \int_0^x f'^-(\xi)d\xi = h_1(x) - h_2(x).$$

Le funzioni h_1, h_2 sono assolutamente continue e crescenti, ed in particolare sono a variazione limitata. Dunque, si trova

$$\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}(h_1 - h_2) \le \mathrm{V}(h_1) + \mathrm{V}(h_2) = h_1(1) + h_2(1) = \int_{[0,1]} |f'(x)|dx.$$

B)⇒A) La funzione $F(x) = \mathrm{V}_{[0,x]}(f)$ è derivabile in q.o. punto $x \in [0,1]$. Proviamo che è continua in tutti i punti. Ricordando la (7.7), dall'ipotesi B) si trova

$$\mathrm{V}_{[0,1]}(f) = \int_{[0,1]} |f'(x)|dx \le \mathrm{V}_{[0,1^-]}(f) - \mathrm{V}_{[0,0^+]}(f),$$

da cui si deduce che $\mathrm{V}_{[0,1]}(f) = \mathrm{V}_{[0,1^-]}(f)$ e $\mathrm{V}_{[0,0^+]}(f) = 0$. Questo prova che F è continua nei punti $x = 0$ e $x = 1$.

Proviamo la continuità di F anche in tutti gli altri punti. In primo luogo, per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$ si ha

$$|f'(x)| = \lim_{\delta\to 0}\Big|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\Big| \leq \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\mathrm{V}_{[x,x+\delta]}(f) = F'(x).$$

Dunque, usando di nuovo B):

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{[0,1]}(f) &= \int_{[0,1]} |f'(\xi)|d\xi \leq \int_{[0,1]} \frac{d}{d\xi}\mathrm{V}_{[0,\xi]}(f)d\xi \\
&= \int_{[0,x]} \frac{d}{d\xi}\mathrm{V}_{[0,\xi]}(f)d\xi + \int_{[x,1]} \frac{d}{d\xi}\mathrm{V}_{[0,\xi]}(f)d\xi \\
&\leq \mathrm{V}_{[0,x^-]}(f) + \mathrm{V}_{[0,1]}(f) - \mathrm{V}_{[0,x^+]}(f).
\end{aligned}$$

Si deduce che $\mathrm{V}_{[0,x^-]}(f) = \mathrm{V}_{[0,x^+]}(f)$, e questo prova la continuità di F in ogni punto $x \in [0,1]$. Il conto precedente fornisce dunque la seguente disuguaglianza

$$\mathrm{V}_{[0,1]}(f) \leq \int_{[0,x]} \frac{d}{d\xi}\mathrm{V}_{[0,\xi]}(f)d\xi + \mathrm{V}_{[0,1]}(f) - \mathrm{V}_{[0,x]}(f),$$

da cui si trova

$$\mathrm{V}_{[0,x]}(f) \leq \int_{[0,x]} \frac{d}{d\xi}\mathrm{V}_{[0,\xi]}(f)d\xi. \tag{7.9}$$

Poichè la variazione totale è una funzione crescente, per il Corollario 7.10 vale anche la disuguaglianza opposta

$$\int_{[0,x]} \frac{d}{d\xi}\mathrm{V}_{[0,\xi]}(f)d\xi \leq \mathrm{V}_{[0,x]}(f). \tag{7.10}$$

Dalle disuguaglianze (7.9) e (7.10) si deduce l'uguaglianza

$$\mathrm{V}_{[0,x]}(f) = \int_{[0,x]} \frac{d}{d\xi}\mathrm{V}_{[0,\xi]}(f)d\xi, \tag{7.11}$$

e questo prova che la funzione $F(x) = \mathrm{V}_{[0,x]}(f)$ è assolutamente continua. Ora la tesi segue dalla maggiorazione puntuale

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{V}_{[x,y]}(f), \quad 0 \leq x < y \leq 1.$$

□

3. Misure con segno

Richiamiamo brevemente la definizione di misura vettoriale e di misura con segno.

Definizione 7.23. Sia $\mathscr{A}$ una σ-algebra su un insieme X. Una misura su $\mathscr{A}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è una funzione $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^n$ tale che:

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Se $A_k \in \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$ sono insiemi disgiunti, allora

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

con serie che converge assolutamente.

Se $n = 1$ diremo che μ è una *misura con segno*. Se $n = 2$ ed $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ diremo che μ è una *misura complessa*. Se X è uno spazio topologico e $\mathscr{A}$ contiene i Boreliani, diremo che μ è una *misura di Borel* a valori in $\mathbb{R}^n$.

Le misure con segno si possono decomporre come differenza di due misure positive.

Teorema 7.24 (Hahn-Jordan). Sia μ una misura con segno su $(X, \mathscr{A})$. Esistono due insiemi $P, N \in \mathscr{A}$ tali che:

i) $P \cap N = \emptyset$ e $P \cup N = X$.
ii) $\mu(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathscr{A}$ tale che $A \subset P$.
ii) $\mu(A) \leq 0$ per ogni $A \in \mathscr{A}$ tale che $A \subset N$.

Una dimostrazione del teorema di trova su Folland, *Real Analysis*, p.86. Qui ci interessa sottolineare solo il seguente corollario. Se μ è una misura con segno, allora esistono due misure positive $\mu^+, \mu^- : \mathscr{A} \to [0, \infty)$ tali che

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A),$$

per ogni $A \in \mathscr{A}$.

4. Misure boreliane su $[0, 1)$ e funzioni monotone

Sia μ una misura di Borel finita su $[0, 1)$. Possiamo definire la funzione $\varphi : [0, 1] \to [0, \infty)$

$$\varphi(x) = \mu([0, x[), \quad x \in [0, 1].$$

Questa funzione è crescente, per la monotonia della misura. Inoltre, φ è continua da sinistra in ogni punto $y \in (0, 1]$

$$\lim_{x \to y^-} \varphi(x) = \lim_{x \to y^-} \mu([0, x[) = \mu\Big(\bigcup_{x<y} [0, x[\Big) = \mu([0, y[) = \varphi(y).$$

Queste osservazione si possono invertire nel seguente modo.

Teorema 7.25. Sia $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua da sinistra. Esiste una misura di Borel finita μ su $[0, 1)$ tale che

$$\mu([x_1, x_2[) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \tag{7.12}$$

per ogni $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$.

Dim. Avremo $\varphi : [0, 1] \to [\varphi(0), \varphi(1)] = I$. Definiamo la funzione "inversa" $\psi : I \to [0, 1]$

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \sup\big\{x \in [0, 1] : \varphi(x) \leq y\big\} \\ &= \max\big\{x \in [0, 1] : \varphi(x) \leq y\big\}.\end{aligned}$$

Il massimo esiste perchè φ è continua da sinistra. Chiaramente la funzione ψ è crescente e dunque $\mathscr{L}^1$-misurabile. Quindi, la famiglia di insiemi

$$\mathscr{E} = \big\{E \subset [0, 1] : \psi^{-1}(E) \text{ è } \mathscr{L}^1\text{-misurabile}\big\}$$

è una σ-algebra che contiene gli insiemi di Borel. Possiamo allora definire la misura $\mu : \mathscr{B}([0, 1]) \to [0, \infty)$

$$\mu(E) = \mathscr{L}^1(\psi^{-1}(E))$$

con $E \subset [0, 1]$ insieme di Borel.

Dati $0 \le x_1 < x_2 \le 1$, osserviamo che: i) $x_1 \le \psi(y)$ se e solo se $\varphi(x_1) \le y$; ii) $\psi(y) < x_2$ se e solo se $\varphi(x_2) > y$. Dunque, per l'insieme $E = [x_1, x_2)$ si ha

$$\psi^{-1}(E) = \big\{y \in I : x_1 \le \psi(y) < x_1\big\} = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)[,$$

e pertanto $\mu(E) = \mathscr{L}^1([\varphi(x_1), \varphi(x_2)[) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$. □

5. Definizione distribuzionale di BV e AC

Vediamo ora la definizione distribuzionale di funzione a variazione limitata. Tale definizione è formulata in termini di integrazione per parti ad afferma che una funzione è a variazione limitata se e solo se la sua derivata è una misura di Borel con segno. Il punto di partenza è la seguente osservazione.

Proposizione 7.26. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente (continua a sinistra) e sia μ la misura di Borel del Teorema 7.25. Allora per ogni funzione $\varphi \in C^1_c(0,1)$ si ha

$$\int_{[0,1]} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{[0,1)} \varphi(x)\,d\mu.$$

Dim. Per $n \in \mathbb{N}$ ed $i = 0, 1, \dots, n$, definiamo $x_n^i = i/n \in [0,1]$. Allora, con argomenti elementari di passaggio al limite e di approssimazione che sono omessi, si trova

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} f(x)\varphi'(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_n^{i-1}) \int_{[x_n^{i-1}, x_n^i]} \varphi'(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_n^{i-1})\big(\varphi(x_n^i) - \varphi(x_n^{i-1})\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \varphi(x_n^i)\big(f(x_n^{i-1}) - f(x_n^i)\big) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \varphi(x_n^i)\mu([x_n^{i-1}, x_n^i[) \\
&= -\int_{[0,1)} \varphi(x)\,d\mu.
\end{aligned}$$

□

Definizione 7.27. Diciamo che $f \in L^1(0,1)$ è una funzione a variazione limitata, $f \in BV(0,1)$, se esiste una misura di Borel con segno su $(0,1)$ tale che per ogni $\varphi \in C^1_c(0,1)$ si abbia

$$\int_{(0,1)} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(0,1)} \varphi(x)\,d\mu.$$

Chiameremo la misura μ *derivata distribuzionale* di f.

Osservazione 7.28. La Definizione 7.27 di funzione $f \in BV(0,1)$ non dipende dal rappresentante scelto nella classe di equivalenza della funzione $f \in L^1(0,1)$. Dunque, la definizione non è equivalente alla definizione puntuale, Definizione 7.1. Si veda la Sezione 3.2 in Ambrosio-Fusco-Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.*

Esempio 7.29. Consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$ per $0 \le x \le 1/2$ ed $f(x) = 1$ per $1/2 < x \le 1$. Allora, è elementare vedere che:

$$\int_{[0,1]} f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} \varphi'(x)dx = \varphi(1) - \varphi(1/2) = -\int_{[0,1]} \varphi(x)d\delta_{1/2},$$

dove $\delta_{1/2}$ è la misura di Dirac concentrata in $1/2$, che è dunque la derivata distribuzionale di f.

Osservazione 7.30. Per il Teorema 6.20, la misura μ può essere decomposta in questo modo:

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s,$$

dove $\mu_{ac} \ll \mathscr{L}^1$ è una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1$ su $[0,1]$, mentre μ_s è una misura singolare rispetto alla misura di Lebesgue, esiste cioè un insieme di Borel $B \subset [0,1]$ tale che $\mathscr{L}^1(B) = 0$ e $\mu((0,1) \setminus B) = 0$. Per il Teorema di Radon-Nikodym, esiste una funzione $g \in L^1(0,1)$ tale che $\mu_{ac} = g\mathscr{L}^1$ su $[0,1]$.

La parte singolare μ_s si può scomporre a sua volta in questo modo:

$$\mu_s = \mu_j + \mu_c,$$

dove μ_j è la parte atomica della misura. Precisamente, μ_j è la restrizione di μ_s all'insieme $J = \{x \in (0,1) : \mu_s(\{x\}) \neq 0\}$. I punti $x \in J$ sono i punti di salto della funzione f. La misura $\mu_c := \mu_s - \mu_j$ è la parte Cantoriana della misura singolare.

Esempio 7.31. Data una funzione $f \in BV(0,1)$, sia μ la misura derivata distribuzionale di f.

1) Se $f \in C^1([0,1])$ allora $\mu_{ac} = f'(x)\mathscr{L}^1$ su $[0,1]$ mentre $\mu_j = \mu_c = 0$.
2) Se f è la funzione di Vitali-Cantor, allora $\mu_{ac} = 0$ in quanto $f'(x) = 0$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in (0,1)$, e $\mu_j = 0$ in quanto. f è continua. Dunque, la misura μ è di tipo Cantoriano ed è concentrata sull'insieme di Cantor.
3) Se f è la funzione dell'Esempio 7.29, allora si ha $\mu_{ac} = \mu_c = 0$ e $\mu_j = \delta_{1/2}$. La misura è solo di salto.

Ora vogliamo dare un senso preciso alla seguente affermazione: una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua se e solo se la misura μ sua derivata distribuzionale è assolutamente continua, $\mu = \mu_{ac}$.

Definizione 7.32 (Spazi di Sobolev sull'intervallo). Sia $1 \le p \le \infty$. Diciamo che una funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ è in $W^{1,p}(0,1)$ se $f \in L^p(0,1)$ ed esiste $g \in L^p(0,1)$ tale che

$$\int_{(0,1)} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(0,1)} \varphi(x)g(x)dx,$$

per ogni $\varphi \in C^1_c(0,1)$. Chiameremo g la *derivata debole* di f e scriveremo, con abuso di notazione, $f' = g$.

Ora proviamo che $AC([0,1])$ coincide con $W^{1,1}(0,1)$. Premettiamo il seguente lemma.

LEMMA 7.33. Sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ una funzione tale che per ogni $\varphi \in C^1_c(0,1)$ si abbia

$$\int_{(0,1)} f(x)\varphi'(x)\,dx = 0. \tag{7.13}$$

Allora f è costante, al di fuori di un insieme di misura nulla.

DIM. Impostiamo la dimostrazione in modo euristico. Scegliamo a nostro piacere una funzione $\chi \in C^1_c(0,1)$ tale che

$$\int_{(0,1)} \chi(x)\,dx = 1.$$

La funzione f è costante se e solo se, per (quasi) ogni $x \in (0,1)$,

$$f(x) = \int_{(0,1)} f(\xi)\chi(\xi)\,d\xi, \tag{7.14}$$

e questa affermazione è equivalente a dire che per ogni $\psi \in C^1_c(0,1)$ si ha

$$\int_{(0,1)} \Big(f(x) - \int_{(0,1)} f(\xi)\chi(\xi)\,d\xi\Big)\,\psi(x)\,dx = 0. \tag{7.15}$$

Per il Teorema di Fubini-Tonelli, tale equazione è equivalente a

$$\int_{(0,1)} f(x)\Big(\psi(x) - \chi(x)\int_{(0,1)} \psi(\xi)\,d\xi\Big)\,dx = 0.$$

A questo punto è chiaro che scegliendo la funzione

$$\varphi(x) = \int_{(0,x)} \Big(\psi(\xi) - \chi(\xi)\int_{(0,1)} \psi(t)\,dt\Big)\,d\xi,$$

funzione che è in $C^\infty_c(0,1)$, e inserendola in (7.13), si ottiene la (7.15) per una generica $\psi \in C^\infty_c(0,1)$ e quindi si ottiene la (7.14).

□

TEOREMA 7.34. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti le affermazioni:

A) $f \in AC([0,1])$.
B) $f \in W^{1,1}(0,1)$.

Inoltre, la derivata puntuale di f coincide $\mathscr{L}^1$-q.o. con la derivata debole.

DIM. A)⇒B) Se $f \in AC([0,1])$ allora $f, f' \in L^1(0,1)$. Mostriamo che vale la formula di integrazione per parti. Per ogni $\varphi \in C^1_c(0,1)$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} f(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{(0,1)} \Big(f(0) + \int_0^x f'(\xi)\,d\xi\Big)\varphi'(x)\,dx \\
&= \int_{(0,1)} f'(\xi)\Big(\int_\xi^1 \varphi'(x)\,dx\Big)\,d\xi \\
&= -\int_{(0,1)} f'(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}$$

Questo prova che $f \in W^{1,1}(0,1)$ e che f' è la derivata debole di f.

B)⇒A) Questa implicazione va interpretata in questo modo: se $f \in W^{1,1}(0,1)$ allora nella classe di equivalenza di f esiste una funzione assolutamente continua.

Indichiamo con $f' \in L^1(0,1)$ la derivata debole di f. La funzione

$$g(x) = \int_0^x f'(\xi)\, d\xi, \quad x \in [0,1],$$

è assolutamente continua, e inoltre per il Teorema di Lebesgue $g'(x) = f'(x)$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$. Dal momento che per ogni $\varphi \in C_c^1(0,1)$ si ha

$$\int_{(0,1)} (f(x) - g(x))\varphi'(x)\, dx = \int_{(0,1)} (f'(x) - g'(x))\varphi(x)\, dx = 0$$

dal Lemma 7.33 segue che $f - g$ è costante al di fuori di un insieme di misura nulla. Quindi f coincide con g a meno di una costante additiva. □

Ecco un'ultima caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue.

Teorema 7.35. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti:

A) $f \in AC([0,1])$.
B) La funzione f è continua, in $BV([0,1])$ ed ha la proprietà di Lusin.

Dim. L'implicazione A)⇒B) segue dal Teorema 7.13 e dall'Esercizio 7.15.

B)⇒A) Senza perdere di generalità possiamo supporre che f sia crescente. Siccome $f \in BV([0,1])$ allora la derivata $f'(x)$ esiste per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$ e inoltre $f' \in L^1([0,1])$.

Sia μ la misura di Borel su $[0,1)$ associata ad f come nel Teorema 7.25. Affermiamo che $\mu \ll \mathscr{L}^1$ su $[0,1)$. Se ciò è vero allora per il Teorema di Radon-Nicodym esiste una funzione $h \in L^1(0,1)$ tale che per ogni $0 < x < 1$ si ha

$$f(x) - f(0) = \mu([0,x)) = \int_{[0,x)} h(\xi) d\xi,$$

e quindi f è assolutamente continua.

Proviamo l'assoluta continuità di μ. Osserviamo preliminarmente che essendo f continua, allora $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0,1)$ e dunque $\mu([x,y[) = \mu([x,y])$. Dobbiamo mostrare che se $\mathscr{L}^1(E) = 0$, $E \subset (0,1)$, allora si ha $\mu(E) = 0$. Per la proprietà di Lusin, avremo $\mathscr{L}^1(f(E)) = 0$ e quindi per ogni $\varepsilon > 0$, esistono intervalli $[\alpha_i, \beta_i] = [f(x_i), f(y_i)]$, $i \in \mathbb{N}$, tali che

$$f(E) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [\alpha_i, \beta_i] \quad \text{e} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i - \beta_i| < \varepsilon.$$

Si può anche supporre che $E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [x_i, y_i]$. Dunque, si trova

$$\mu(E) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu([x_i, y_i[) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu([x_i, y_i]) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |f(x_i) - f(y_i)| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i - \beta_i| < \varepsilon.$$

Dalla arbitrarietà di ε si deduce che $\mu(E) = 0$. □

6. Appendice

Presentiamo la dimostrazione di Riesz-Nagy del Teorema di derivabilità delle funzioni monotone.

Lemma 7.36 (Riesz). Sia $g \in C([0,1])$ una funzione continua e sia

$$I = \big\{x \in (0,1] : \text{ esiste } \xi \in (0,1] \text{ tale che } \xi > x \text{ e } g(\xi) > g(x)\big\}.$$

Allora l'insieme I è aperto e inoltre

$$I = \bigcup_{k=1}^{N} (\alpha_k, \beta_k), \quad 0 \le N \le \infty,$$

con $(\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_h, \beta_h) = \emptyset$ se $k \neq h$ e $g(\alpha_k) \le g(\beta_k)$ per ogni $1 \le k \le N$.

Dim. Se $x \in I$ allora $g(x) < g(\xi)$ per qualche $\xi > x$. Poichè g è continua esiste $\varepsilon > 0$ tale che $g(y) < g(\xi)$ per $y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ e dunque $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset I$. Questo prova che I è aperto.

Per $x \in I$ si definiscano

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \sup\{r > 0 : (x-r, x] \subset I\} \\ \beta_x &= \sup\{r > 0 : [x, x+r) \subset I\}. \end{aligned}$$

Poichè I è aperto, allora $\alpha_x, \beta_x > 0$ e posto $I_x = (x - \alpha_x, x + \beta_x)$ risulta $I = \bigcup_{x \in I} I_x$. Indroduciamo sull'insieme I la relazione di equivalenza $x \sim y$ se e solo se $I_x = I_y$ e sia $[x] = \{y \in I : y \sim x\}$. Esiste una famiglia al più numerabile di classi di equivalenza distinte (motivare). È allora possibile selezionare una successione di rappresentanti $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e scrivere

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{x_k} \quad \text{con} \quad I_{x_k} = (\alpha_k, \beta_k).$$

Mostriamo che $g(\alpha_k) \le g(\beta_k)$. Se per assurdo fosse $g(\alpha_k) > g(\beta_k)$, allora esisterebbe $x_0 \in (\alpha_k, \beta_k)$ tale che $g(x_0) > g(\beta_k)$. Dunque esisterebbe anche $\bar{x} = \sup\{x \in (\alpha_k, \beta_k) : g(x) = g(x_0)\}$. Dal momento che $\bar{x} \in I$, esiste un punto $\xi > \bar{x}$ tale che $g(\xi) > g(\bar{x})$ e deve necessariamente essere $\xi > \beta_k$. Dunque si ha $g(\beta_k) < g(\bar{x}) < g(\xi)$, e pertanto $\beta_k \in I$. Questo non è possibile in quanto $I_{x_k} = (\alpha_k, \beta_k)$ è un intervallo massimale in I. □

Dim. del Teorema di Lebesgue. Proviamo il teorema per una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ crescente con l'ipotesi aggiuntiva che f sia anche continua. Lasciamo al lettore il compito di rimuovere l'ipotesi di continuità. Per ogni coppia di punti $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, definiamo i rapporti incrementali

$$R(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

e siano inoltre

$$\lambda^{\pm}(x) = \liminf_{y \to x^{\pm}} R(x,y), \quad \Lambda^{\pm}(x) = \limsup_{y \to x^{\pm}} R(x,y).$$

Chiaramente, risulta $\lambda^-(x) \le \Lambda^-(x) \le \lambda^+(x) \le \Lambda^+(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. Posto

$$\begin{aligned} A &= \{x \in [0,1] : \Lambda^+(x) = \infty\}, \\ B &= \{x \in [0,1] : \lambda^-(x) = -\infty\}, \\ D &= \{x \in [0,1] : \lambda^-(x) < \Lambda^+(x)\} \end{aligned}$$

dobbiamo dimostrare che $\mathscr{L}^1(A) = \mathscr{L}^1(B) = \mathscr{L}^1(D) = 0$. Sarà sufficiente provare che $\mathscr{L}^1(A) = 0$ e $\mathscr{L}^1(D) = 0$.

Per $k \in \mathbb{N}$ consideriamo l'insieme $A_k = \{x \in [0,1] : \Lambda^+(x) > k\}$ e osserviamo che $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili e che $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Se $x \in A_k$ allora esiste $y > x$ tale che $R(x,y) > k$, ovvero

$$g(y) = f(y) - ky > f(x) - kx = g(x).$$

Per il Lemma di Riesz si ha

$$A_k = \bigcup_{h=1}^{\infty} (\alpha_h, \beta_h)$$

con unione disgiunta e con $g(\alpha_h) \leq g(\beta_h)$, ovvero

$$f(\beta_h) - f(\alpha_h) \geq k(\beta_h - \alpha_h).$$

Dunque, la misura di A_k si stima nel seguente modo

$$\mathscr{L}^1(A_k) = \sum_{h=1}^{\infty}(\beta_h - \alpha_h) \leq \frac{1}{k}\sum_{h=1}^{\infty}(f(\beta_h) - f(\alpha_h)) \leq \frac{1}{k}(f(1) - f(0)).$$

Abbiamo usato il fatto che f è crescente. Questo prova che

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{L}^1(A_k) = 0$$

e pertanto $\mathscr{L}^1(A) = 0$.

Ora proviamo che $\mathscr{L}^1(D) = 0$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} D(a,b) \\ &= \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \{x \in [0,1] : \lambda^-(x) < a < b < \Lambda^+(x)\}. \end{aligned}$$

Se proviamo che $\mathscr{L}^1(D(a,b)) = 0$ per ogni $a < b$, allora $\mathscr{L}^1(D) = 0$ e la dimostrazione del teorema è terminata.

Sia $B_a = \{x \in (0,1) : \lambda^-(x) < a\}$ e fissiamo $\alpha \leq \beta$. Se $x \in (\alpha,\beta) \cap B_a$ allora esiste $y < x$ tale che $R(x,y) < a$, ovvero

$$g(y) = f(y) - ay < f(x) - ax = g(x).$$

Per il Lemma di Riesz $(\alpha,\beta) \cap B_a = \bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k, \beta_k)$ con unione disgiunta e $g(\alpha_k) \geq g(\beta_k)$, ovvero

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq a(\beta_k - \alpha_k).$$

Dunque, usando nuovamente il Lemma di Riesz

$$(\alpha,\beta) \cap D(a,b) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in (\alpha_k, \beta_k) : \Lambda^+(x) > b\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{h=1}^{\infty}(\alpha_k^h, \beta_k^h)$$

con $(\alpha_k, \beta_k) = \bigcup_{h=1}^{\infty} (\alpha_k^h, \beta_k^h)$, unione disgiunta e $f(\beta_k^h) - f(\alpha_k^h) \geq b(\beta_k^h - \alpha_k^h)$ per ogni $k, h \in \mathbb{N}$. Si deduce che

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^1((\alpha,\beta) \cap D(a,b)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} (\beta_k^h - \alpha_k^h) \leq \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} (f(\beta_k^h) - f(\alpha_k^h)) \\
&\leq \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} (f(\beta_k) - f(\alpha_k)) \leq \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \leq \frac{a}{b} (\beta - \alpha).
\end{aligned}$$

Siccome $\mathscr{L}^1$-q.o. punto $x \in D(a,b)$ è di densità 1, dal momento che $a/b < 1$ segue che $\mathscr{L}^1(D(a,b)) = 0$. $\square$

CAPITOLO 8

Esercizi

1. Misure e σ-algebre

ESERCIZIO 8.1. Sia X un insieme con $\mathrm{Card}(X) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Sia $\mathscr{A}$ la famiglia degli insiemi $A \subset X$ tali che $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ oppure $\mathrm{Card}(A') \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Si definisca $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ponendo $\mu(A) = 0$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ e $\mu(A) = 1$ se $\mathrm{Card}(A') \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Provare che $\mathscr{A}$ è una $\sigma-$algebra e che μ è una misura.

ESERCIZIO 8.2. Sia X un insieme e sia $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}(X)$. Provare che l'insieme

$$\bigcap \big\{ \mathscr{A} : \ \mathscr{A} \text{ è una } \sigma\text{-algebra di } X \text{ tale che } \mathscr{Q} \subset \mathscr{A} \big\}$$

è la più piccola σ-algebra contenente $\mathscr{Q}$, detta σ-algebra generata da $\mathscr{Q}$.

ESERCIZIO 8.3. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $\mu(X) < \infty$. Un punto $x \in X$ tale che $\{x\} \in \mathscr{A}$ si dice atomo di μ se $\mu(\{x\}) > 0$. Provare che se $\mu(X) < \infty$ allora l'insieme degli atomi è al più numerabile.

ESERCIZIO 8.4. Sia $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ una misura di probabilità (ovvero $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$) non atomica (ovvero $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$). Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\mathrm{diam}(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \mu(E) < \varepsilon,$$

con $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

ESERCIZIO 8.5. Per ciascun insieme $A \subset [0, 1]$ definiamo

$$\mu(A) = \sqrt{\mathscr{L}^1(A)} \quad \text{e} \quad \nu(A) = \sqrt{\mathrm{diam}(A)} = \sup\{\sqrt{|x-y|} \in \mathbb{R} : x, y \in A\},$$

dove $\mathscr{L}^1$ è la misura esterna di Lebesgue e dichiariamo $\nu(\emptyset) = 0$.

i) Stabilire se μ e ν sono misure esterne su $[0, 1]$.
ii) Stabilire se μ e ν sono misure Boreliane su $[0, 1]$.

2. Misura di Lebesgue e misura di Hausdorff

ESERCIZIO 8.6. Costruire un esempio di successione decrescente di insiemi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{L}^1(A_n) \neq \mathscr{L}^1\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

ESERCIZIO 8.7. Sia $I = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$ un plurintervallo di $\mathbb{R}^n$ con misura $\mathrm{mis}(I) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$. Sia $\mathscr{L}^n$ la misura esterna di Lebesgue.

i) Provare che $\mathrm{mis}(I) = \mathscr{L}^n(I)$.
ii) Provare che I è $\mathscr{L}^n$-misurabile.
iii) Provare che ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile.

Esercizio 8.8. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Definiamo $x_0 + A = \{x_0 + x \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$ e $\lambda A = \{\lambda x \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$. Provare che $\mathscr{L}^n(x_0 + A) = \mathscr{L}^n(A)$ e che $\mathscr{L}^n(\lambda A) = \lambda^n \mathscr{L}^n(A)$.

Esercizio 8.9. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile. Provare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ anche l'insieme $x + E = \{x + y \in \mathbb{R}^n : y \in E\}$ è $\mathscr{L}^n$-misurabile.

Esercizio 8.10. Provare che, per ogni $s \geq 0$, la funzione di insiemi $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ definita in classe è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 8.11. Decomporre $[0,1] = A \cup B$ con $\mathscr{L}^1(A) = 0$ e

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

con $K_n \subset [0,1]$ insiemi compatti che non contengono intervalli (non degeneri).

Esercizio 8.12. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $0 \leq L < \infty$. Provare che per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $0 \leq s \leq n$ si ha

$$\mathscr{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathscr{H}^s(A).$$

Esercizio 8.13. Per ogni $t \geq 0$ e per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ si definisca la misura di Hausdorff *sferica* di A di dimensione t nel seguente modo:

$$\mathscr{S}^t(A) = \sup_{\delta > 0} \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_t \Big(\frac{\operatorname{diam}(B_j)}{2} \Big)^t : B_j \subset \mathbb{R}^n \text{ palle}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,\ \operatorname{diam}(B_j) < \delta \Big\}.$$

Provare che $\mathscr{S}^t(A) = 0$ se e solo se $\mathscr{H}^t(A) = 0$

Esercizio 8.14. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione α-Hölderiana, ovvero tale che $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ per ogni $x, y \in [0,1]$, dove $\alpha \in (0,1]$, e sia $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$ il suo grafico.

i) Provare che $\mathscr{L}^2(G) = 0$.
ii) Determinare tutti i valori di $s \in [0,2]$ (in funzione di α) tali che $\mathscr{H}^s(G) = 0$.

3. Funzioni misurabili e funzioni integrabili

Esercizio 8.15. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Discutere la misurabilità delle composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 8.16. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni $\mathscr{L}^1$-misurabili. Provare che l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge ad un valore finito}\}$$

è $\mathscr{L}^1$-misurabile.

Esercizio 8.17. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in q.o. punto di $\mathbb{R}$. Provare che f è $\mathscr{L}^1$-misurabile.

Esercizio 8.18. Provare che il limite puntuale di una successione di funzioni continue su $\mathbb{R}$ è una funzione boreliana.

Esercizio 8.19. Sia $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ una funzione misurabile non-negativa tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0.$$

Provare che $f(x) = 0$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.20. Siano $f, g \in L^1(X)$ due funzioni integrabili tali che $f(x) \leq g(x)$ in μ-q.o. punto $x \in X$ ed $f < g$ su un insieme di misura positiva. Provare che

$$\int_X f(x)d\mu < \int_X g(x)d\mu.$$

Esercizio 8.21. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $0 < m \leq f(x) \leq M < \infty$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$. Provare che

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)\Big(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\Big) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Esercizio 8.22. Sia $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

i) $t \mapsto f(t,x)$ è misurabile per ogni $x \in \mathbb{R}$.
ii) per q.o. $t \in [0,1]$, la funzione $x \mapsto f(t,x)$ è continua.

Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che la funzione $g(t) = f(t,\varphi(t))$, $t \in [0,1]$, è misurabile.

Esercizio 8.23. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Provare che esiste $x \in [0,1]$ tale che

$$f(x) \leq \int_0^1 f(y)dy.$$

Esercizio 8.24. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa, $f \geq 0$, tale che

$$\int_0^\infty x f(x)dx < \infty.$$

Provare che

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f(x+n)dx < \infty$$

Esercizio 8.25. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile tale che

$$\int_I f(x)dx = 0$$

per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ di lunghezza 1 o $\sqrt{2}$. Provare che $f = 0$ $\mathscr{L}^1$-q.o.

Esercizio 8.26. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)|dx \leq 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. È vero che $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$?

Esercizio 8.27. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa, $f \geq 0$. Supponiamo che esista un numero $0 \leq \alpha \leq 1$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$\int_{[0,1]} f(x)^n dx = \alpha.$$

Provare che f è la funzione caratteristica di un insieme misurabile.

Esercizio 8.28. Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni Boreliane su $\mathbb{R}^n$. Provare le seguenti affermazioni:

i) Le funzioni

$$f(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(x), \quad F(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$$

sono Boreliane.

ii) Se $f_k(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione f è Boreliana.

Esercizio 8.29. Siano $\mathscr{A}$ una σ-algebra su un insieme X, $\mathscr{B}$ una σ-algebra su Y, ed $f : X \to Y$ un funzione misurabile (ovvero $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ per ogni $B \in \mathscr{B}$). Sia infine $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ una misura. Provare che $f_\sharp\mu = \nu : \mathscr{B} \to [0,\infty]$ definita da

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B},$$

è una misura, chiamata *misura push-forward* di μ. Provare poi la seguente formula di cambiamento di variabile

$$\int_Y g(y)d\nu(y) = \int_X g(f(x))d\mu(x),$$

per funzioni $g \in L^1(Y,\nu)$.

Esercizio 8.30. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana. Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) Esistono costanti $a, b \geq 0$ tali che sia $\varphi(t) \leq a + b|t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
ii) Per ogni spazio con misura finita $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ed ogni funzione $f \in L^1(X)$ si ha $\varphi \circ f \in L^1(X)$.
iii) Per ogni funzione $f \in L^1([0,1])$ si ha $\varphi \circ f \in L^1([0,1])$.

Esercizio 8.31. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana. Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) Esiste una costante $b \geq 0$ tali che sia $\varphi(t) \leq b|t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
ii) Per ogni spazio di misura $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ed ogni funzione $f \in L^1(X)$ si ha $\varphi \circ f \in L^1(X)$.
iii) Per ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $\varphi \circ f \in L^1(\mathbb{R})$.

4. Limite e derivata sotto segno di integrale

Esercizio 8.32. Studiare continuità e derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.33. Provare che la funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(y-x)^2}{\sqrt{y}} \sin\Big(\frac{1}{y-x}\Big) dy, \quad x \in (0,1),$$

è ben definita e continua. È derivabile con continuità su $(0,1)$?

Esercizio 8.34. Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e sia $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\log^{1/2}(1+x-t)} dt, \quad x \geq 0.$$

Dare condizioni sufficienti su f affinchè F sia, rispettivamente, ben definita, continua e derivabile.

Esercizio 8.35. Sia $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to\infty} x \int_0^{\pi/2} f(t) \mathrm{e}^{-x\sin t} dt.$$

Esercizio 8.36. Sia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin t)^{1-x}} dt.$$

1) Calcolare, se esiste, il $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
2) Discutere la derivabilità di f.

Esercizio 8.37. Provare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

è effettivamente definita su tutto $\mathbb{R}$, che è continua e derivabile (in tutti i punti?). Calcolare f in forma non integrale.

Esercizio 8.38. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{x^\alpha}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{t+x^2}} dt.$$

Esercizio 8.39. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathrm{e}^{tx} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x \in (-1,1)$. Sia $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} f(t) dt, \quad -1 < x < 1.$$

Provare che φ è derivabile su $(-1,1)$.

Esercizio 8.40. Sia $f \in L^1(0,1)$ e definiamo la funzione $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(y) \mathrm{e}^{-y/x} dy, \quad x > 0.$$

i) Provare che F è continua su $(0,\infty)$.

ii) Dare condizioni su f sufficienti affinchè F si estenda in modo continuo fino a $x = 0$.

ESERCIZIO 8.41. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f \in L^1(X)$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\Big(1 + \Big(\frac{|f(x)|}{n}\Big)^2\Big) d\mu.$$

ESERCIZIO 8.42. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx.$$

ESERCIZIO 8.43. Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni misurabili e definiamo $A_n = \{x \in [0,1] : |f(x)| \le n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Provare che se $fg \in L^1([0,1])$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)g(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)g(x)dx.$$

ESERCIZIO 8.44. Data $f \in L^1(0,1)$, definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{nf(y)}{1 + n^2(y-x)^2} dy.$$

i) Provare che se f è continua in $x_0 \in (0,1)$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

ii) Studiare la convergenza della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(0,1)$.

ESERCIZIO 8.45. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\log(x+t)}{1+t} dt, \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che f è continua su $[0,1]$.
ii) Provare che f è derivabile in $]0,1]$.
iii) Stabilire se $f' \in L^1(0,1)$.

ESERCIZIO 8.46. Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$ e sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{[0,x]} (1+t^2) d\mu(t), \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che φ è continua su $[0,1]$ se e solo se $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$.
ii) Provare che se $\varphi \in C^1([0,1])$ allora la misura μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1$.

ESERCIZIO 8.47. Sia $b : [0,1[\to [0,1]$ una funzione crescente tale che $b(t) > 0$ per $t > 0$ e

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-b(t)} dt < \infty.$$

(i) Provare che la formula

$$F(r) = r \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rb(t)} dt$$

definisce una funzione $F : [1, \infty) \to [0, \infty)$

(ii) Provare che per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\lim_{r\to\infty} r \int_\delta^\infty \mathrm{e}^{-rb(t)} dt = 0.$$

(iii) Supponiamo ora anche che sia $b(0) = 0$ e $b'(0) = a > 0$. Provare che allora si ha

$$\lim_{r\to\infty} F(r) = 1/a.$$

(iv) Come applicazione calcolare

$$\lim_{r\to\infty} r \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r \sin t} dt.$$

5. Spazi L^p

Esercizio 8.48. Sia $1 < p < \infty$. Provare che per ogni funzione misurabile $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ non negativa si ha

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{f(s)}{s} ds\Big)^p \frac{dt}{t} \le \int_0^\infty \Big(\frac{f(s)}{s}\Big)^p \frac{ds}{s}.$$

Esercizio 8.49. Sia $1 < p < \infty$. Provare che esiste una costante $C_p > 0$ tale che per ogni funzione $f \in C^2([0, 1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ si ha

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \le C_p \Big(\int_0^1 |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \Big(\int_0^1 |f''(x)|^q dx\Big)^{1/q},$$

dove $1/p + 1/q = 1$ sono esponenti Hölder coniugati. Quando $p = 2$ provare che $C_2 = 1$ è la costante ottimale e calcolare le funzioni per cui la disuguaglianza è un'uguaglianza.

Esercizio 8.50. Siano $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ due funzioni misurabili, positive e limitate.

i) Provare che

$$(*) \qquad \Big(\int_{[0,1]} f\, g\, dx\Big)^3 \le \Big(\int_{[0,1]} f^2\, g\, dx\Big)\Big(\int_{[0,1]} f\, g^2\, dx\Big).$$

ii) Calcolare tutte le funzioni f e g (misurabili, positive e limitate) tali che la disuguaglianza $(*)$ sia un'uguaglianza.

Esercizio 8.51. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $\mu(X) < \infty$. Dato $1 \le p < \infty$, provare che per ogni funzione $f : X \to [0, \infty)$ si ha

$$f \in L^p(X) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty k^p \mu(A_k) < \infty,$$

dove $A_k = \{x \in X : k - 1 \le f(x) < k\}$.

Esercizio 8.52. Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione positiva, $f > 0$ su $\mathbb{R}^n$, e definiamo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{B_1(x)} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dove $B_1(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < 1\}$ è la palla di raggio 1 e centro $x \in \mathbb{R}^n$.

i) Provare che F è continua.
ii) Provare che $F(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$.
iii) Provare che F assume valore massimo ma non valore minimo.

Esercizio 8.53. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Provare che sono equivalenti:
i) $f \in L^\infty([0,1])$.
ii) $f \in L^p([0,1])$ per ogni $1 \le p < \infty$ e $\sup\limits_{p \ge 1} \|f\|_p < \infty$.

Esercizio 8.54. Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva, $\varphi > 0$. Provare che per ogni $f \in L^\infty([0,1])$ si ha

$$\lim_{p\to\infty} \Big(\int_{[0,1]} |f(x)|^p \varphi(x)\, dx \Big)^{1/p} = \|f\|_{L^\infty([0,1])}.$$

Esercizio 8.55. Sia $f \in L^\infty([0,1])$ una funzione positiva su $[0,1]$. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \log \Big(\int_{[0,1]} \sinh(pf(x))dx \Big).$$

Esercizio 8.56. Sia $f \in L^1([0,\infty)) \cap C([0,\infty))$. Provare che sono equivalenti le seguenti tre affermazioni:
i) Il limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ esiste.
ii) Si ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
iii) f è uniformemente continua.

Esercizio 8.57. Sia $f \in C^2([0,\infty))$ una funzione tale che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Discutere la validità delle seguenti affermazioni:
i) Se $f' \in L^1([0,\infty))$ allora $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
ii) Se $f' \in L^\infty([0,\infty))$ allora $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
iii) Se $f'' \in L^1([0,\infty))$ allora $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Esercizio 8.58. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$, dove $r > 0$ è un raggio fissato. Data una funzione boreliana $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ definiamo le funzioni $F, G : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$

$$F(x) = \int_{B_r(x)} f(y)dy \quad \text{e} \quad G(x) = \int_{\partial B_r(x)} f(y)d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Provare le seguenti affermazioni:
1) F è semicontinua inferiormente.
2) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; F \in C(\mathbb{R}^n)$.
3) $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; F \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.
4) $f \in C(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; F \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
5) $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; G \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.

Esercizio 8.59. Sia $V \subset L^\infty([0,1])$ l'insieme delle funzioni del tipo $f = \chi_E$ con $E \subset [0,1]$ misurabile. Stabilire se V è compatto in $L^\infty([0,1])$.

Esercizio 8.60. Per ogni $\alpha \in [0,1]$, sia $f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione $f_\alpha(x) = \chi_{[0,\alpha]}(x)$, $x \in [0,1]$. Stabilire se l'insieme

$$K = \{f_\alpha \in L^1([0,1]) : \alpha \in [0,1]\}$$

è compatto come sottoinsieme di $L^1([0,1])$.

Esercizio 8.61. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di probabilità, $\mu(X) = 1$, e sia $f \in L^1(X)$ una funzione tale che $f(x) \geq 1$ per q.o. $x \in X$. Provare che

$$\lim_{p \to 0^+} \Big(\int_X f(x)^p d\mu \Big)^{1/p} = \exp\Big(\int_X \log(f(x)) d\mu \Big).$$

Esercizio 8.62. Sia $f \in L^2(0,1)$ e definiamo la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad x \in [0,1].$$

Provare che esiste una costante $C > 0$ indipendente da f tale che per ogni $h \in (0,1)$ si ha

$$\Big(\int_0^{1-h} \Big| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \Big|^2 dx \Big)^{1/2} \leq C \|f\|_2.$$

Esercizio 8.63. Provare che ogni funzione $f \in C^1([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ verifica

$$\Big(\int_0^1 f(x) dx \Big)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 f'(x)^2 dx.$$

Determinare tutte le funzioni per cui si ha uguaglianza.

Esercizio 8.64. Sia $h \in L^1([0,1])$ una funzione assegnata. Provare che esiste un'unica (q.o.) funzione $f \in L^1([0,1])$ che risolve l'equazione

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \log(1 + f(y)^2) dy,$$

per q.o. $x \in [0,1]$.

Esercizio 8.65. Sia $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}} & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Determinare tutti i $p \in [1, \infty)$ tali che $f \in L^p(Q)$ e per tali valori calcolare $\|f\|_p$.

Esercizio 8.66. Sia $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy < 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$ munito della misura di Lebesgue e sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = y^2 e^{-y/x}$.

i) Determinare tutti i $p \in [1, \infty)$ tali che $f \in L^p(A)$.
ii) Stabilire se $f \in L^\infty(A)$.

6. Varie nozioni di convergenza

Esercizio 8.67. Siano $f_n, g_n, h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, le funzioni

$$f_n(x) = \sin(2\pi n x), \quad g_n(x) = \frac{1/n}{x^2 + 1/n^2}, \quad h_n(x) = n^{1/n} \mathrm{e}^{-x/n}.$$

Studiare la convergenza puntuale, quasi ovunque, uniforme, in L^1, in L^2, in L^2-debole, e in misura delle tre successioni di funzioni.

Esercizio 8.68. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si consideri la serie

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che la serie converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ed anche quasi ovunque, e che g è 1-periodica.

Esercizio 8.69. Sia $\varphi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Definiamo la successione di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \varphi(n)\chi_{(0,1/n]}(x)$, per $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in [0,1]$.

A) Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $L^1([0,1])$.
ii) La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente integrabile.
iii) Si ha $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)/t = 0$.

B) Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

a) Esiste $g \in L^1([0,1])$ tale che $|f_n(x)| \le g(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in [0,1]$.
b) Si ha

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Esercizio 8.70. Provare che le successioni di funzioni

$$f_n(x) = \sin(n^2 x^2), \quad g_n(x) = \sin(\sqrt{nx})$$

convergono debolmente a 0 in $L^1([0,1])$.

Esercizio 8.71. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p([0,1])$, $1 \le p < \infty$, uniformemente limitata $\|f_n\|_p \le C < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che $f_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$.

i) Provare che $f \in L^p([0,1])$.
ii) Se $1 < p < \infty$, provare che $f_n \to f$ in $L^q([0,1])$ per ogni $1 \le q < p$.

Esercizio 8.72. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^2([0,1])$ limitata (ovvero $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$), e sia $f \in L^2([0,1])$. Definiamo le funzioni

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

Provare che:

i) Se $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L^2([0,1])$ allora $F_n \to F$ uniformemente su $[0,1]$.
ii) Se $F_n \to F$ puntualmente su $[0,1]$ allora $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L^2([0,1])$.

Esercizio 8.73. Sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme chiuso e consideriamo l'insieme di funzioni

$$X = \{f \in L^2([0,1]) : f(x) \in K \text{ per q.o. } x \in K\}.$$

i) Provare che X è chiuso in $L^2([0,1])$ per la convergenza forte.
ii) Sia ora $K \subset \mathbb{R}$ un *intervallo* chiuso. Provare che X è chiuso per la convergenza debole di $L^2([0,1])$.
iii) Dare un esempio di insieme chiuso $K \subset \mathbb{R}$ tale che X non sia chiuso per la convergenza debole di $L^2([0,1])$.

Esercizio 8.74. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $\varphi_n \in L^2(X)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione ortonormale di funzioni tali che $|\varphi_n(x)| \le g(x)$ per q.o. $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $g \in L^2(X)$. Provare che se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ converge per q.o. $x \in X$ allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esercizio 8.75. Siano $f_n \in C^1([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni tali che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ convergano in $L^1([0,1])$. Provare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$.

Esercizio 8.76. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ e sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Supponiamo che $|f_n| \le |f|$ q.o. e che $f_n \to f$ debolmente in $L^1(\mathbb{R})$. Provare che $f_n \to f$ fortemente in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 8.77. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue su $[0,1]$. Provare che sono equivalenti:

i) La successione è uniformemente limitata e $f_n \to 0$ puntualmente.
ii) Per ogni misura di Borel μ finita su $[0,1]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)d\mu = 0.$$

Esercizio 8.78. Siano $f, f_k \in L^1([0,1])$, $k \in \mathbb{N}$, funzioni tali che $f_k \to f$ q.o. e

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = \|f\|_1.$$

Provare che $f_k \to f$ in $L^1([0,1])$.

Esercizio 8.79. Siano $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, funzioni non negative, $f_k \ge 0$ ed $f \ge 0$. Provare che le condizioni

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(x) \ge f(x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \le \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

implicano che $f_k \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 8.80. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $[\log n, \log(n+1)]$. Stabilire per quali $1 \le p < \infty$ la successione di funzioni $\varphi_n = \sqrt{n}\chi_n$:

i) converge fortemente in $L^p(0,\infty)$.
ii) converge debolmente in $L^p(0,\infty)$.

Esercizio 8.81. Sia $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni convergente in $L^1([0,1])$, e sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili tali che $L^1(A_n) \to 0$. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f_n(x)dx = 0.$$

ESERCIZIO 8.82. Costruire una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, tale che:

i) $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
ii) $\|f_n\|_p \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
iii) f_n non converge ad f in $L^p(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 8.83. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una di successione di funzioni misurabili su $[0,1]$ tale che:

i) $\|f_n\|_2 \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
ii) $f_n(x) \to 0$ per q.o. $x \in [0,1]$.

Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)|dx = 0.$$

ESERCIZIO 8.84. Siano $E, E_n \subset [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, insiemi misurabili e siano $f = \chi_E$ ed $f_n = \chi_{E_n}$ le rispettive funzioni caratteristiche. Provare che per un qualsiasi $1 \le p < \infty$ sono equivalenti:

A) $f_n \to f$ in $L^p(0,1)$ forte.
B) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$ debole.

ESERCIZIO 8.85. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $|a_n| \le \log n$ per ogni $n \ge 2$. Provare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}, \quad x \ge 2$$

converge in $L^1(2,\infty)$.

ESERCIZIO 8.86. Su $\mathbb{R}$ fissiamo la misura di Lebesgue.

i) Trovare, se possibile, una successione di numeri reali $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^k \chi_{[0,1]}(x)$ converga a zero in $L^1(\mathbb{R})$ ma non in $L^2(\mathbb{R})$.
ii) Trovare, se possibile, una successione reale $c_k > 0$ tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^{-1-1/k}\chi_{[1,\infty[}(x)$ converga a zero in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$.
iii) Trovare, se possibile, una successione di funzioni $f_k \in L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ che tenda a zero in $L^2([0,1])$ ma non in $L^1([0,1])$.

ESERCIZIO 8.87. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che per ogni $x > 0$ si abbia

$$|f(x)| \le \frac{1}{x^\alpha}.$$

Calcolare tutti i valori di $\alpha > 0$ tali che la serie di funzioni

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{kf(x+k)}{\log^2 k}, \quad 0 < x < 1,$$

converga in $L^1(0,1)$.

Esercizio 8.88. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(nx)}dt.$$

Esercizio 8.89. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione 1−periodica e localmente integrabile, e sia $\varphi\in C([0,1])$ una funzione continua. Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\varphi(x)=\int_{[0,1]}f(x)dx\cdot\int_{[0,1]}\varphi(x)dx.$$

7. Teorema di Fubini-Tonelli

Esercizio 8.90. Sia $f:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ la funzione $f(x,y)=\mathrm{e}^{-yx^2}\sin y$.

i) Verificare che i seguenti integrali ripetuti esistono (in quale senso? Lebesgue? Riemann generalizzato?) e sono uguali

$$\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty f(x,y)dx\Big)dy=\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty f(x,y)dy\Big)dx.$$

ii) Provare che $f\notin L^1([0,\infty)\times[0,\infty))$.

Esercizio 8.91. Sia A una matrice reale $n\times n$. Provare che

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}}\langle Ax,x\rangle dx=\frac{\omega_n}{n(n+2)}\mathrm{tr}(A).$$

Esercizio 8.92. Sia μ una misura Boreliana finita su $[1,\infty)$ e definiamo la funzione $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$

$$f(t)=\int_1^\infty\cos(tx)d\mu(x).$$

Provare che esiste $t\in[0,\pi]$ tale che $f(t)=0$.

Esercizio 8.93. Sia $\alpha\in[1,2]$ e si consideri l'insieme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y\geq 1,\ x^\alpha+y^\alpha\leq 1,x,y\geq 0\}$. Calcolare l'integrale

$$\int_A\frac{1}{(\log x)^2+(\log y)^2}\frac{1}{xy}dxdy.$$

Esercizio 8.94. Sia $(X,\mathscr{A},\mu)$ uno spazio di misura σ-finito (cioè $X=\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ con $X_n\in\mathscr{A}$ tali che $\mu(X_n)<\infty$) e sia $f:X\to[0,\infty]$ una funzione misurabile tale che

$$\mu(\{x\in X:f(x)>t\})>\frac{1}{1+t},\quad\text{per ogni } t>0.$$

Provare che f non è integrabile su X.

Esercizio 8.95. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Stabilire se f è integrabile sul quadrato $Q=[0,1]\times[0,1]$. Calcolare gli integrali ripetuti, nei due ordini.

Esercizio 8.96. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione $f(x,y)=y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}$. Usando il Teorema di Fubini-Tonelli per l'integrale

$$I=\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} f(x,y)dxdy,$$

verificare che

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Esercizio 8.97. Sia ω_n la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$. Usando lo spezzamento $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{n-2}$, il Teorema di Fubini-Tonelli e le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, provare che

$$\omega_n=2\pi\omega_{n-2}\int_0^1 r(1-r^2)^{(n-2)/2}dr.$$

Per induzione, calcolare una formula esplicita per ω_{2n} e ω_{2n+1}.

Esercizio 8.98. Sia μ una misura Boreliana di probabilità su $\mathbb{R}$, $\mu(\mathbb{R})=1$. Provare che per ogni insieme Boreliano $E\subset\mathbb{R}$ si ha

$$\mathscr{L}^1(E)=\int_{\mathbb{R}}\mu(x+E)dx.$$

Esercizio 8.99. Sia $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\Big(\frac{|x|^2}{n}\Big)\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}dx.$$

Esercizio 8.100. Sia $(X,\mathscr{A},\mu)$ uno spazio di misura. Sia $f\in L^1(X)$ e per $\lambda>0$ definiamo

$$\varphi(\lambda)=\mu(\{x\in X: f(x)>\lambda\})$$
$$\psi(\lambda)=\mu(\{x\in X: f(x)<-\lambda\}).$$

Provare che φ e ψ sono funzioni Boreliane e che

$$\|f\|_1=\int_0^\infty\big(\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)\big)d\lambda.$$

Esercizio 8.101. Sia (X,μ) uno spazio di probabilità, $\mu(X)=1$, e sia $f\in L^1(X)$ una funzione tale che $f\geq 1$. Provare che si ha:

$$\int_X f(x)\log f(x)\,d\mu\geq\int_X f(x)d\mu\,\cdot\,\int_X\log f(x)\,d\mu.$$

8. Regolarizzazioni. Convoluzione

Esercizio 8.102. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile e sia f_ε, $\varepsilon>0$, la sua regolarizzazione. Provare che:

i) Se f è crescente allora f_ε è crescente.
ii) Se f è L-Lipschitz continua allora f_ε è L-Lipschitz continua.
iii) Se f è convessa allora f_ε è convessa.

Esercizio 8.103. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Provare che f è lineare.

Esercizio 8.104. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Supponendo $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ provare che $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dedurne che $\varphi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$, per qualche costante $\alpha \in \mathbb{R}$.
ii) Provare che se φ è misurabile allora φ è ancora della forma $\varphi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$.
iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Provare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.105. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$
Provare che $f(x) = \alpha x^2$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.106. Sia $\in L^1(\mathbb{R})$ una funzione con supporto compatto tale che
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$
Provare che $f = 0$ q.o. su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.107. Siano $\mathscr{B} = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \|f\|_1 \le 1\}$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$.

i) Provare che $\mathscr{B}$ non è necessariamente uniformemente integrabile.
ii) Provare che l'insieme
$$\mathscr{G} = \{g * f \in L^1(\mathbb{R}) : f \in \mathscr{B}\}$$
è uniformemente integrabile.

9. Teoremi di derivazione

Esercizio 8.108. Data $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, provare che per q.o. $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(y) dy = f(x_0),$$
dove l'integrale è "orientato".

Esercizio 8.109. Siano $f, g, h : [0,1] \to [0, \infty]$ funzioni non negative ed integrabili. Provare che sono equivalenti:

i) $(f(x))^2 \le g(x)h(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$.
ii) Per ogni insieme misurabile $E \subset [0,1]$ si ha
$$\Big(\int_E f(x) dx \Big)^2 \le \int_E g(x) dx \int_E h(x) dx.$$

Esercizio 8.110. Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ tale che per ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, dove $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, si abbia $\mu([\alpha, \beta]) \le (\beta - \alpha)^2$. Provare che μ è la misura nulla.

10. Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata

Esercizio 8.111. Sia $f \in AC([0,1])$. Provare che

$$\mathrm{V}(f) = \int_{[0,1]} |f'(x)| dx.$$

Esercizio 8.112. Consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{x}{|\log(x/2)|^\alpha} \sin(1/x) & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \in BV([0,1])$.

Esercizio 8.113. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Provare che (a meno di insiemi di misura nulla):

i) Se $f \in W^{1,p}(0,1)$ con $1 < p \le \infty$ allora f è Hölderiana.
ii) Si ha $f \in W^{1,\infty}(0,1)$ se e solo se f è Lipschitziana.

Esercizio 8.114. Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni. Discutere la validità delle seguenti affermazioni:

i) Se $f, g \in BV([0,1])$ allora il prodotto $fg \in BV([0,1])$.
ii) Se $f, g \in AC([0,1])$ allora il prodotto $fg \in AC([0,1])$.

Esercizio 8.115. Sia $\{q_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : n \in \mathbb{N}\}$ una enumerazione di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ e indichiamo con $\chi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione caratteristica dell'intervallo (q_n, q_{n+1}), ovvero $\chi_n(x) = 1$ se x è (strettamente) compreso fra q_n e q_{n+1}, e $\chi_n(x) = 0$ altrimenti. Provare che per $\alpha > 1$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \chi_n(x), \quad x \in [0,1].$$

è a variazione totale limitata su $[0,1]$.

Esercizio 8.116. Sia $f \in AC([0,1])$ una funzione assolutamente continua. Provare che f trasforma insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.

Esercizio 8.117. Provare che se $f \in C^1([0,1])$ allora $f \in BV([0,1])$ e inoltre

$$\mathrm{V}_{[0,1]}(f) = \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

Esercizio 8.118. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente. Sappiamo che f è differenziabile quasi dappertutto. Supponiamo che

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x) dx.$$

Provare che f è assolutamente continua.

Esercizio 8.119. Costruire una funzione continua $f \in C([0,1])$ tale che $f \in AC([0,1-\varepsilon])$ per ogni $0 < \varepsilon < 1$ ma $f \notin AC([0,1])$.

Esercizio 8.120. Provare che le funzioni assolutamente continue trasformano insiemi misurabili in insiemi misurabili.

Esercizio 8.121. Provare che le funzioni assolutamente continue trasformano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.

Esercizio 8.122. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Provare che per ogni $0 < h < 1$ si ha

$$\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|dx \le h\mathrm{V}_{[0,1]}(f).$$

Esercizio 8.123. Dare un esempio di funzione $f \in AC([0,1])$ strettamente crescente e tale che $f'(x) = 0$ su un insieme di misura positiva.

Esercizio 8.124. Dare un esempio di funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile in tutti i punti ma con $f' \notin L^1([0,1])$.

Esercizio 8.125. Sia $0 \le \delta < 1$ un numero reale. Costruire una funzione $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che: 1) φ è strettamente crescente; 2) $|\varphi(t) - \varphi(s)| \le |t-s|$ per ogni $t, s \in [0,1]$; 3) Si ha

$$\mathscr{L}^1\big(\{t \in [0,1] : \text{esiste } \varphi'(t) = 0\}\big) \ge \delta.$$

Esercizio 8.126. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^\alpha \cos(1/x) & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

i) Determinare tutti i valori di α tali che $f \in BV([0,1])$.
ii) Determinare tutti i valori di α tali che $f \in AC([0,1])$.

Esercizio 8.127. Data una funzione $f \in L^1(0,1)$, provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) $f \in L^2(0,1)$.
ii) Esiste una funzione assolutamente continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y \in [0,1]$ si abbia

$$\Big|\int_x^y f(t)\,dt\Big|^2 \le (g(x) - g(y))(x-y).$$

Esercizio 8.128. Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ la funzione di Cantor-Vitali. Studiare la misura μ derivata distribuzionale di f.

Esercizio 8.129. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione integrabile.

(i) Supponiamo che esista una misura di Radon (con segno) μ su $\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)d\mu,$$

per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ non negativa, $\varphi \ge 0$. Provare che $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

(ii) Supponiamo che

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\Big| \varphi(x)dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ non negativa. Provare che $f = 0$ q.o.

Esercizio 8.130. Stabilire se la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log^2(x/2)} \sin\big(\log x\big), & \text{se } x \in (0,1], \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è assolutamente continua su $[0,1]$.

Esercizio 8.131. Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$.

i) Provare che la formula

$$\varphi(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y} d\mu(y), \quad x \in [0,1],$$

definisce una funzione $\varphi \in C^1(]0,1];\mathbb{R})$.

ii) Supponiamo che esista $\alpha > 0$ tale che $\mu([0,x]) \le x^\alpha$ per ogni $x \in [0,1]$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che φ sia assolutamente continua su $[0,1]$.

Esercizio 8.132. Sia $E \subset [0,1]$ un insieme di misura nulla. Costruire una funzione $f \in AC([0,1])$ crescente tale che

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = +\infty$$

per ogni $x \in E$.

11. Esercizi vari

Esercizio 8.133. Stabilire se esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni funzione $f \in C^2([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ si abbia

$$\|f\|_\infty \le C\|f''\|_\infty.$$

Calcolare l'eventuale costante ottimale e una funzione per cui si ha uguaglianza.

Esercizio 8.134. Sia $K \subset [0,1]$ l'insieme 1/3 di Cantor. Provare che

$$K = \Big\{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{3^n} \text{ con } a_n \in \{0,2\}\Big\}.$$

Esercizio 8.135. Sia $a_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di numeri reali e consideriamo l'insieme

$$A = \Big\{x \in [0,2\pi] : \sum_{n=1}^\infty a_n |\sin(nx)| < \infty\Big\}.$$

Provare che

$$\mathscr{L}^1(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty a_n < \infty.$$

Esercizio 8.136. Costruire una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che: 1) $f \in C^1([0,1])$; 2) f è strettamente crescente; 3) L'insieme $C \subset \mathbb{R}$ dei valori critici di f è più che numerabile, dove $C = \{f(x) \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$.

Sugg. Lavorare con la distanza dall'insieme di Cantor.

Esercizio 8.137. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $\|f''\|_\infty < \infty$. Provare che $\sqrt{f}$ è Lipschitziana.

Esercizio 8.138. Sia $\mathscr{K} = \{K \subset \mathbb{R}^n : K \neq \emptyset,\ K \text{ compatto}\}$. Per ogni $\delta > 0$ sia $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, K) < \delta\}$. Provare che la funzione $d : \mathscr{K} \times \mathscr{K} \to [0, \infty)$

$$d(K, H) = \inf \big\{\delta > 0 : K \subset H_\delta \text{ e } H \subset K_\delta\big\}$$

è una distanza su $\mathscr{K}$, nota come distanza di Hausdorff. Discutere la validità della semicontinuità inferiore

$$\mathscr{H}^1(K) \leq \liminf_{m\to\infty} \mathscr{H}^1(K_m),$$

con $K, K_m \in \mathscr{K}$ e $K_m \to K$ nella distanza di Hausdorff quando $m \to \infty$.

Esercizio 8.139. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $\gamma, \gamma_n : [0, 1] \to X$ curve Lipschitziane, $n \in \mathbb{N}$. Discutere la validità della semicontinuità inferiore per la variazione totale:

$$\mathrm{V}(\gamma) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{V}(\gamma_n).$$

Esercizio 8.140. Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito e sia $T : X \to X$ una trasformazione che conserva la misura (ovvero $E \in \mathscr{A}$ implica che $T(E) \in \mathscr{A}$ e $\mu(T(E)) = \mu(E)$). Dato $E \in \mathscr{A}$, provare che

$$\mu\left(\{x \in E : \text{ esiste } k \text{ tale che } T^n(x) \notin E \text{ per ogni } n \geq k\}\right) = 0.$$

Questo è il *Teorema del ritorno di Poincarè*.

Esercizio 8.141. Nel Postulato IV dell'opera *Sulla sfera e il cilindro* Archimede afferma:

"Tra le superfici aventi le stesse linee terminali giacenti su un piano, sono disuguali quelle tali che, essendo ambedue concave dalla stessa parte, o una è tutta compresa dall'altra e dalla superficie piana avente gli stessi termini, o ha una parte compresa dall'altra, una parte comune con essa. Ed è minore la superficie che è compresa dall'altra."

Provare l'affermazione di Archimede.