# Analisi Reale 2015-16 — Foglio 2

Funzioni misurabili, integrabili, passaggio al limite — 21 Ottobre 2015

---

**Esercizio 1** Siano $f, g \in L^1(X)$ due funzioni integrabili tali che $f(x) \leqslant g(x)$ in $\mu$-q.o. punto $x \in X$ ed $f < g$ su un insieme di misura positiva. Provare che

$$\int_X f(x)d\mu < \int_X g(x)d\mu.$$

**Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)|dx \leqslant 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. È vero che $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$?

**Esercizio 3** Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f \in L^1(X)$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\Big(1 + \Big(\frac{|f(x)|}{n}\Big)^2\Big) d\mu.$$

**Esercizio 4** Provare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\log(1 + x^2t^2)}{1 + t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

è effettivamente definita su tutto $\mathbb{R}$, che è continua e derivabile (in tutti i punti?). Calcolare $f$ in forma non integrale.

**Esercizio 5** Siano $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, funzioni non negative, $f_k \geqslant 0$ ed $f \geqslant 0$. Provare che le condizioni

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(x) \geqslant f(x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

implicano

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|dx = 0.$$

**Esercizio 6** $\bigstar$ Sia $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

i) $t \mapsto f(t,x)$ è misurabile per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ii) per q.o. $t \in [0,1]$, la funzione $x \mapsto f(t,x)$ è continua.

Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che la funzione $g(t) = f(t, \varphi(t))$, $t \in [0,1]$, è misurabile.

**Esercizio 7** $\bigstar$ Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M < \infty$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. $x \in [0,1]$. Provare che

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)\Big(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\Big) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$