Analisi Reale 2015-15 Foglio 3

Continuità e derivabilità di funzioni integrali 2 Novembre 2015

Esercizi più facili

Esercizio 1 Provare che la funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(y-x)^2}{\sqrt{y}} \sin\Big(\frac{1}{y-x}\Big) dy, \quad x \in (0,1),$$

è continua.

Esercizio 2 Studiare continuità e derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathrm{e}^{tx} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x \in (-1,1)$. Sia $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} f(t) dt, \quad -1 < x < 1.$$

Provare che φ è derivabile su $(-1,1)$.

Esercizi più difficili

Esercizio 4 Sia $f \in L^1(0,1)$ e definiamo la funzione $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(y) \mathrm{e}^{-y/x} dy, \quad x > 0.$$

i) Provare che F è continua su $(0,\infty)$.

ii) Dare condizioni su f sufficienti affinchè F si estenda in modo continuo fino a $x = 0$.

Esercizio 5 Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{x^\alpha}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{t + x^2}} dt.$$

Risp.: $\alpha \geqslant 2$. Caso semplificato: mettere 1 al posto di e^t. Event.: integrare per parti.

Esercizio 6 Data $f \in L^1(0,1)$, definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{n f(y)}{1 + n^2 (y-x)^2} dy.$$

Provare che se f è continua in $x_0 \in (0,1)$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$