Analisi Reale 2015-16 Foglio 5

Esercizi vari 23 Novembre 2015

Esercizi più facili

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile e sia f_ε, $\varepsilon > 0$, la sua regolarizzazione. Provare che:

i) Se f è crescente allora f_ε è crescente.

ii) Se f è L-Lipschitz continua allora f_ε è L-Lipschitz continua.

iii) Se f è convessa allora f_ε è convessa.

Esercizio 2 Sia $K \subset [0,1]$ l'insieme 1/3 di Cantor. Provare che

$$K = \Big\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ con } a_n \in \{0,2\} \Big\}.$$

Esercizio 3 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $|a_n| \leqslant \log n$ per ogni $n \geqslant 2$. Provare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}, \quad x \geqslant 2$$

converge in $L^2(2,\infty)$.

Esercizi più difficili

Esercizio 4 Costruire una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che: 1) $f \in C^1([0,1])$; 2) f è strettamente crescente; 3) L'insieme $C \subset \mathbb{R}$ dei valori critici di f è più che numerabile, dove $C = \{f(x) \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$.

Sugg. Lavorare con la distanza dall'insieme di Cantor.

Esercizio 5 Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito e sia $T : X \to X$ una trasformazione che conserva la misura (ovvero $E \in \mathscr{A}$ implica che $T(E) \in \mathscr{A}$ e $\mu(T(E)) = \mu(E)$). Dato $E \in \mathscr{A}$, provare che

$$\mu\left(\{x \in E : \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che } T^n(x) \notin E \text{ per ogni } n \geqslant k\}\right) = 0,$$

dove $T^n = T \circ \ldots \circ T$, n volte. Questo è il *Teorema del ritorno di Poincarè.*

Sugg. Costruire una successione di trasformati disgiunti fra loro. L'insieme di partenza dovrà avere misura nulla.

Esercizio 6 ★ Sia $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di numeri reali e consideriamo l'insieme

$$A = \Big\{ x \in [0, 2\pi] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\sin(nx)| < \infty \Big\}.$$

Provare che

$$\mathscr{L}^1(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Sugg. $|\sin(nx)| \geqslant \sin^2(nx) = 1 - \cos^2(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx)$. Teorema di Riemann-Lebesgue.