Analisi Reale 2015-16 Foglio 6

Fubini-Tonelli 2 Dicembre 2015

Esercizio 1 Consideriamo il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ e sia $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire se f è integrabile su Q. Calcolare gli integrali ripetuti, nei due ordini.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}$. Usando il Teorema di Fubini-Tonelli per l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} f(x,y)dxdy,$$

verificare che

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Esercizio 3 Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ con $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Provare che per ogni insieme di Borel $E \subset \mathbb{R}$ si ha

$$\mathscr{L}^1(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu(x+E)dx.$$

Esercizio 4 Sia $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \mathrm{e}^{-yx^2}\sin y$. Verificare che i seguenti integrali ripetuti esistono (precisando in che senso) e sono uguali

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty f(x,y)dx \Big) dy = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty f(x,y)dy \Big) dx.$$

Provare che $f \notin L^1([0,\infty) \times [0,\infty))$.

Sugg. Integrare sul rettangolo $[0,n] \times [0,m]$ e poi passare al limite. Conti lunghi.

Esercizio 5 (Disuguaglianza di Minkowski integrale) Siano $(X, \mathscr{A}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ due spazi di misura σ-finiti con misure complete e sia $f : X \times Y \to [0,\infty]$ una funzione misurabile sullo spazio prodotto, non negativa. Provare che per $1 \leqslant p < \infty$ risulta

$$\Big(\int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\nu \Big)^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_Y \Big(\int_X f(x,y)^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} d\nu.$$

Esercizio 6 Sia μ una misura di Borel finita su $[1,\infty)$ e definiamo la funzione $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \int_1^\infty \cos(tx)d\mu(x).$$

Provare che esiste $t \in [0,\pi]$ tale che $f(t) = 0$.

Sugg. Moltiplicare per $\sin(t)$ e integrare.