Analisi Reale 2015-16 Foglio 7

Esercizi vari 19 Dicembre 2015

Esercizio 1 Data $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, provare che per q.o. $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(y)dy = f(x_0),$$

dove l'integrale è "orientato".

Sugg. Teorema di differenziazione di Lebesgue nella versione più forte.

Esercizio 2 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^\alpha \cos(1/x) & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

i) Determinare tutti i valori di α tali che $f \in BV([0,1])$.

ii) Determinare tutti i valori di α tali che $f \in AC([0,1])$.

Esercizio 3 Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni. Discutere la validità delle seguenti affermazioni:

i) Se $f, g \in BV([0,1])$ allora il prodotto $fg \in BV([0,1])$.

ii) Se $f, g \in AC([0,1])$ allora il prodotto $fg \in AC([0,1])$.

Esercizio 4 Siano $f_n \in C^1([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni tali che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergano in $L^1([0,1])$. Provare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$.

Esercizio 5 Sia $0 \leqslant \delta < 1$ un numero reale. Costruire una funzione $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che: 1) φ è strettamente crescente; 2) $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leqslant |t - s|$ per ogni $t, s \in [0,1]$; 3) Si ha

$$\mathscr{L}^1\big(\{t \in [0,1] : \text{esiste } \varphi'(t) = 0\}\big) \geqslant \delta.$$

Esercizio 6 Sia $h \in L^1([0,1])$ una funzione assegnata. Provare che esiste un'unica (q.o.) funzione $f \in L^1([0,1])$ che risolve l'equazione

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \log(1 + f(y)^2) dy,$$

per q.o. $x \in [0,1]$.

Sugg. Punto fisso di Banach.

Esercizio 7 ★★ Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $\|f''\|_\infty < \infty$. Provare che $\sqrt{f}$ è Lipschitziana.

Esercizio di Analisi 1.