Programma finale del Corso di Analisi Reale, Anno Accademico 2015-16, Laurea in Matematica. Docente: Roberto Monti

1) Teoria della misura. Misura esterna, misura, σ-algebra, insieme misurabile, Teorema di Carathéodory, misura di Lebesgue, Misure di Hausdorff, Teorema di continuità della misura per successioni monotone.

2) Teoria dell'integrale. Funzioni misurabili, operazione sulle funzioni misurabili, limiti di funzioni misurabili, approssimazione con funzioni semplici, convergenza q.o., Teorema di Egorov, integrale di funzioni semplici e di funzioni misurabili positive, funzioni integrabili, proprietà generali dell'integrale di Lebesgue (Teorema 2.15 s.d.), rappresentazione dell'integrale tramite la funzione di distribuzione, Teorema sull'assoluta continuità dell'integrale, Teorema della convergenza monotona, Lemma di Fatou, Teorema della convergenza dominitata, uniforme integrabilità, Teorema di Lebesgue-Vitali (Teorema 2.24, dimostrazione solo di (B)$\Rightarrow$(A), derivazione sotto segno di integrale, integrale di Riemann e continuità dell'integranda (s.d.), Integrale di Riemann e di Lebesgue (s.d.).

3) Misure di Borel. La misura di Lebesgue è Boreliana regolare, Teorema di approssimazione da sopra con aperti e da sotto con compatti, struttura degli insiemi misurabili, insieme non misurabile di Vitali, le misure metriche sono Boreliane, le misure di Hausdorff sono Boreliane, insieme di Cantor, funzione di Cantor-Vitali, insiemi misurabili non Boreliani.

4) Spazi di funzioni integrabili. Spazi L^p, disuguaglianza di Hölder, disuguaglianza di Minkowski, inclusioni fra spazi L^p, Teorema di completezza, convergenza forte, debole e in misura (della Sezione 4.3 solo gli enunciati dei teoremi, nessuna dim.), Teoremi sulle regolarizzazioni, continuità in media, densità delle funzioni continue in L^p, Teorema di Riemann-Lebesgue, le Sezioni 7 e 8 del Capitolo 4 sono escluse.

5) Misure prodotto e Teorema di Fubini-Tonelli. Misure su semianelli, le dimostrazioni della Sezione 1 del Capitolo 5 sono escluise, misure prodotto, misure complete, Teorema di riduzione, Teorema di Fubini e Teorema di Tonelli, convoluzione.

6) Teoremi di differenziazione. Teorema di Radon-Nikodym, misure di Radon in $\mathbb{R}^n$ e loro regolarità da sopra e da sotto (senza dim.), Teorema di Lusin (s.d.), derivata di misure, Teorema del ricoprimento di Besicovitch (solo enunciato), Lemma di confronto, Teorema di differenziazione e versione geometrica di Radon-Nikodym, Teorema di derivazione di Lebesgue, la Sezione 5 del Capitolo 6 è esclusa.

7) Funzioni BV e AC. Variazione totale, positiva e negativa, Teorema di Jordan sulle funzioni a variazione limitata, Teorema di Lebesgue sulla derivabilità delle funzioni monotone (senza dim.), integrabilità della derivata delle funzioni BV, funzioni AC, le funzioni AC sono BV, le dim. dei Lemmi 7.16 e 7.17 sono escluse, Teorema fondamentale del calcolo per le funzioni AC, la funzione integrale di funzioni L^1 è AC, cenni su misure Boreliane e funzioni monotone, definizione distribuzionale di BV, cenni sulla struttura della misura derivata distribuzionale, spazio $W^{1,p}$, $AC = W^{1,1}$, l'Appendice 6 è esclusa.

8) Fanno parte integrante del Programma d'esame anche gli esercizi settimanali messi in rete, i Fogli 1–8.

Modalità dell'esame scritto. Tre esercizi/problemi da risolvere sui seguenti argomenti: 1) Aspetti generali sulle misure e misura di Lebesgue. 2) Integrale, passaggio col limite e la derivata sotto il segno di integrale, studio di funzioni integrali. 3) Spazi L^p. Convergenza forte e debole, convergenza q.o. 4) Regolarizzazioni e convoluzione. 5) Teorema di Fubini-Tonelli. 6) Funzioni a variazione limitata (definizione puntuale) e funzioni assolutamente continue.

Modalità dell'esame orale. All'esame orale verranno poste tre domande: 1) Enunciare una definizione oppure discutere un esempio. 2) Enunciare e dimostrare un teorema. 3) Risolvere un esercizio tratto dai fogli settimanali messi in rete durante il corso.

R. Monti
15 Gennaio 2016