Analisi Reale

Scritto del 15 Giugno 2016

Esercizio 1 (10 punti) Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ e si consideri la serie di funzioni

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n+x)}{1+n^\alpha x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro. Provare che per ogni $p \in (1, \infty]$ esiste un numero $\alpha(p) > 0$ tale che

$$\alpha > \alpha(p) \qquad \Rightarrow \qquad g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Sugg. Cambio variabile di integrazione $t = n^{\alpha/2}x$.

Esercizio 2 (12 punti) Sia $\varphi \in L^\infty\big([0,\infty)\big)$ e sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(xy)}{1+y^2} dy, \qquad x \geq 0.$$

i) Provare che $f \in C(0,\infty)$.

ii) Provare che $f \in C^1(0,\infty)$.

iii) Supponiamo in aggiunta che $|\varphi(t)| \leq t^{1+\varepsilon}$ per $0 < t \leq 1$, per qualche $\varepsilon > 0$. Provare che esiste finita la derivata

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Sugg. Cambio variabile $t = xy$

Esercizio 3 (10 punti) Sia $(X, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $f_n : X \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni misurabili positive

i) Provare che se la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} d\mu < \infty. \qquad (*)$$

ed inoltre converge q.o. ad una funzione f, allora $f \in L^1(X)$ ed $f_n \to f$ in $L^1(X)$.

ii) Provare che se si ha $f_1 \in L^1(X)$ ed $\sum_{n=2}^{\infty} \|f_n - f_{n-1}\|_1 < \infty$ allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la $(*)$.

Sugg. $0 \leq f_n \leq g_n := \max\{f_1, \dots, f_n\}$. Costruire maggiorante.

---

2 ore e 45 minuti a disposizione

<u>Esercizio</u> Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ e si consideri la serie di funzioni

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n+x)}{1+n^\alpha |x|^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro. Provare che per ogni $p \in [1, \infty]$ esiste $\alpha(p) > 0$ tale che

$$\alpha > \alpha(p) \quad \Rightarrow \quad g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Soluzione. Esaminiamo prima il caso $p = \infty$. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(n+x)|}{1+n^\alpha x^2}\,dx \leq$$

$$\leq \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+n^\alpha x^2}\,dx = [n^{\alpha/2}x = t]$$

$$= \|f\|_\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\,dt < \infty \quad \text{se } \alpha > 2$$

Dunque posso scegliere $\alpha(\infty) = 2$.

Più in generale:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(n+x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+n^\alpha x^2)^q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ovvero $q = \frac{p}{p-1}$

Dunque

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \leq \|f\|_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

che è finito se $\frac{\alpha}{2q} > 1 \iff$ cioè $\alpha > 2q = \frac{2p}{p-1}$.

Posso scegliere $\alpha(p) = \frac{2p}{p-1}$.

Esercizio Sia $\varphi \in L^\infty(0,\infty)$ e sia $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(xy)}{1+y^2}\, dy, \qquad x \geq 0.$$

i) Provare che $f \in C(0,\infty)$.

ii) Provare che $f \in C^1(0,\infty)$.

iii) Supponiamo in aggiunta che $|\varphi(t)| \leq t^{1+\varepsilon}$ per $0 < t \leq 1$, per qualche $\varepsilon > 0$. Provare che esiste finita

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}.$$

Soluzione. i) Con il cambio di variabile $t = xy$ ad $x > 0$ fissato:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{1+\frac{t^2}{x^2}} \frac{1}{x}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2}\varphi(t)\, dt.$$

Per $0 < \delta \leq x \leq M < \infty$ si ha

$$\left|\frac{x}{x^2+t^2}\varphi(t)\right| \leq \frac{M}{\delta^2+t^2}\|\varphi\|_\infty \in L^1(0,\infty)$$

Per convergenza dominata:

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \int_0^\infty \lim_{x\to\bar{x}} \frac{x}{x^2+t^2}\varphi(t)\, dt$$

$$= f(\bar{x}), \qquad \forall\, \bar{x} > 0.$$

ii) Se i passaggi sono leciti, avremo:

$$\frac{df}{dx}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) \varphi(t)\, dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} \varphi(t)\, dt$$

Come sopra, se $0 < \delta \leq x (\leq M < \infty)$ avremo:

$$\left| \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} \varphi(t) \right| \leq \frac{1}{x^2+t^2} |\varphi(t)| \leq \frac{1}{\delta^2+t^2} \|\varphi\|_\infty$$

con maggiorante in $L^1(0,\infty)$. I passaggi sono leciti e le stime mostrano anche che

$$x \longmapsto \int_0^\infty \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} \varphi(t)\, dt \quad \text{è continua per } x>0.$$

iii) In questo caso φ è continua in $t=0$ con $\varphi(0)=0$. Per convergenza dominata si trova f continua in $x=0$ con $f(0)=0$.

Esaminiamo

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2} \varphi(t)\, dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{x^2+t^2} dt + \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{x^2+t^2} dt$$

Il limite

$$\lim_{x\to 0} \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{x^2+t^2} dt = \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$$

è lecito in quanto

$$\left|\frac{\varphi(t)}{x^2+t^2}\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{t^2} \in L^1(1,\infty).$$

Il limite

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{x^2+t^2} = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt$$

è lecito in quanto

$$\left|\frac{\varphi(t)}{x^2+t^2}\right| = \frac{|\varphi(t)|}{x^2+t^2} \leq \frac{t^{1+\varepsilon}}{t^2} = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \in L^1(0,1).$$

<u>Esercizio</u> Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f_n : X \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni misurabili non negative che verifica:

$$(*) \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \, d\mu < \infty$$

i) Provare che se $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ q.o. allora $f \in L^1(X)$ ed $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ in $L^1(X)$

ii) Provare che se $f_1 \in L^1(X)$ e si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \| f_n - f_{n-1} \|_1 < \infty$$

allora la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifica $(*)$.

Dim. \ Sol.

i) Sia $g_n(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, $x \in X$ ed $n \in \mathbb{N}$. Allora:

- g_n è misurabile
- g_n è crescente punto per punto

Dunque esiste

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) \in [0, \infty].$$

Inoltre g è misurabile. Inoltre per convergenza monotona:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, d\mu =$$

$$= \int_X g(x)\, d\mu .$$

Dalla ipotesi (*) deduciamo che $g \in L^1(X)$.

Inoltre $0 \leq f_n(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$.

Dunque questo vale q.o. anche per f (ovvero $f(x) \leq g(x)$ per q.o. $x \in X$).

Di conseguenza

$$|f_n - f| \leq \underset{\underset{L^1(X)}{\cap}}{2g} \quad \text{q.o. su } X$$

Per convergenza dominata:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |f_n - f|\, d\mu = 0$$

ii) Abbiamo $\max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} = f_k(x)$ per qualche $k = 1, \dots, n$. Dunque

$$\max\{f_1 \dots f_n\} = (f_k - f_{k-1}) + (f_{k-1} - f_{k-2}) + \dots + (f_2 - f_1) + f_1$$

$$\leq |f_1| + \sum_{h=2}^{n} |f_h - f_{h-1}|$$

Quindi

$$\int_X \max\{f_1, \dots f_n\}\, d\mu \leq \|f_1\|_1 + \sum_{h=2}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_1 < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$