Analisi Reale

Scritto del 22 Febbraio 2016

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 1 - \cos(2\pi n x)$.

(i) Per ogni $g \in L^1([0,1])$ calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) g(x) dx.$$

(ii) Per $p \in [1, \infty)$, provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $L^p([0,1])$.

(iii) Stabilire se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente in $L^p([0,1])$ per qualche $p \in [1,\infty)$.

Esercizio 2 (12 punti) Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ una funzione non negativa, $f \geq 0$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ ed $r > 0$ definiamo

$$F(x,r) = \int_{B_r(x)} f(y) dy,$$

dove $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| < r\}$.

(i) Provare che per ogni $r > 0$ fissato si ha $\lim\limits_{|x|\to\infty} F(x,r) = 0$.

(ii) Provare che per ogni $r > 0$, la funzione $x \mapsto F(x,r)$ è continua su $\mathbb{R}^n$.

(iii) Provare che per ogni $r > 0$ esiste $x_r \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(x_r, r) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^2} F(x,r)$.

(iv) Dare un esempio di $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $f \geq 0$, tale che necessariamente $\lim\limits_{r\to\infty} |x_r| = \infty$.

Sugg. (i) $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. (ii) $\chi_{B_r(x)} \to \chi_{B_r(x_0)}$ q.o. per $x \to x_0$.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ una funzione assolutamente continua.

(i) Provare che $f(x) = \sin(\varphi(x))$, $x \in [0,1]$, è assolutamente continua su $[0,1]$.

(ii) Provare che $g(x) = \varphi(x^\alpha)$ è assolutamente continua su $[0,1]$, per ogni $\alpha \geq 1$.

(iii) Sia $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ assolutamente continua. Stabilire se in generale la funzione $h = \psi \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua su $[0,1]$.

Sugg.: (i) $|\sin(t) - \sin(s)| \leq |t - s|$.

---

2 ore e 45 minunti a disposizione

Esercizio. Si consideri la successione di funzioni
$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 1 - \cos(2\pi n x)$.

(i) Calcolare per ogni $g \in L^1(0,1)$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, g(x)\, dx.$$

(ii) Per ogni $p \in [1,\infty)$ provare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad una funzione f debolmente in $L^p(0,1)$.

(iii) Stabilire se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^p(0,1)$ forte.

Soluzione. (i) Estendiamo g con zero fuori da $[0,1]$.
Per il Teorema di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, g(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{[0,1]} g(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) \cos(2\pi n x)\, dx \right)$$

$$= \int_{[0,1]} g(x)\, dx - 0 = \int_{[0,1]} g(x)\, dx$$

(ii) Sia q il coniugato di p e sia $g \in L^q([0,1]) \subset L^1([0,1])$.
Dal punto (i)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_{[0,1]} 1 \cdot g(x)\, dx$$

ovvero $f_n \xrightarrow{L^p} 1$ per $n \to \infty$.

(iii) No. Infatti per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx = \int_{[0,1]} |\cos(2\pi n x)|^p dx =$$

$$= \int_0^{2\pi n} |\cos(t)|^p \frac{1}{2\pi n} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(t)|^p dt > 0.$$

$\square$

Esercizio Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, una funzione e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$ definiamo

$$F(x,r) = \int_{B_r(x)} f(y)\, dy$$

dove $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r \}$.

(i) Provare che per ogni $r > 0$ fissato si ha

$$\lim_{|x| \to +\infty} F(x,r) = 0.$$

(ii) Provare che per ogni $r > 0$ esiste $x_r \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$F(x,r) \leq F(x_r, r) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Dare un esempio di $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ per cui si abbia

$$\lim_{r \to +\infty} |x_r| = +\infty.$$

Risoluzione (i) Per la disuguaglianza di Hölder

$$|F(x,r)| \leq \int_{B_r(x)} |f|\, dy \leq \mathcal{L}^n(B_r(x))^{1/2} \left(\int_{B_r(x)} |f|^2 dy \right)^{1/2}$$

dove $\mathcal{L}^n(B_r(x))^{1/2} = \sqrt{\omega_n r^n}$ non dipende da x

e inoltre

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_{B_r(x)} |f|^2 dy = 0$$

per convergenza dominata, essendo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) É certamente $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Per convergenza dominata e per il fatto che $\mathcal{L}^n(\partial B_r(x)) = 0$ si trova

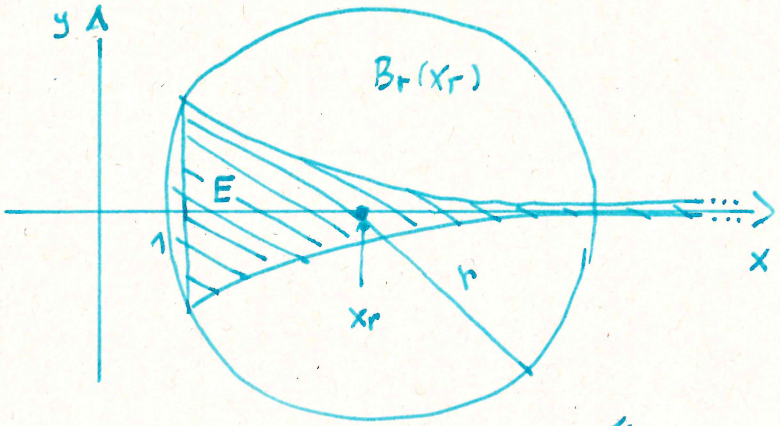
$$\lim_{y \to x} \int_{B_r(y)} f(z)\,dz = \int_{B_r(x)} f(z)\,dz .$$

Ovvero $x \longmapsto F(x,r)$ è continua. Insieme al punto (i) questo implica che $x \mapsto F(x,r)$ ha massimo.

(iii) Sia $f = \chi_E$ dove $E \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \frac{1}{x^2} \,,\; x \geq 1 \right\}.$$

Siccome $\mathcal{L}^2(E) < \infty$ si ha $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ed anche $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dalla simmetria di E vediamo che $x_r \in \mathbb{R}^2$ deve essere sull'asse delle $x \geq 1$:



La figura mostra con "evidenza" che $x_r \to \infty$ per $r \to \infty$.

$\square$

Esercizio Sia $\phi : [0,1] \to [0,1]$ una funzione assolutamente continua.

(i) Provare che $f(x) = \sin(\phi(x))$, $x \in [0,1]$, è assolutamente continua.

(ii) Provare che $g(x) = \phi(x^\alpha)$, $x \in [0,1]$, è assolutamente continua, $\forall \alpha > 0$.

(iii) Sia $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ assolutamente continua. Dire se, in generale, $h(x) = \psi \circ \phi(x)$, $x \in [0,1]$, è assolutamente continua.

Risoluzione. (i) Ricordiamo che $|\sin(t) - \sin(s)| \leq |t-s|$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{N} (\beta_i - \alpha_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^{N} |\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i)| < \varepsilon .$$

Dunque

$$\sum_{i=1}^{N} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| = \sum_{i=1}^{N} |\sin(\phi(\beta_i)) - \sin(\phi(\alpha_i))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} |\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i)| < \varepsilon .$$

(ii) La funzione ϕ verifica

$$\phi(x) = \phi(0) + \int_0^x \phi'(t)\, dt \qquad \forall x \in [0,1]$$

con $\phi' \in L^1(0,1)$. Dunque anche

$$g(x) = \phi(x^\alpha) = \phi(0) + \int_0^{x^\alpha} \phi'(t)\, dt$$

Con il cambio di variabile $t = s^\alpha$, $dt = \alpha s^{\alpha-1} ds$ si trova

$$g(x) = g(0) + \int_0^x \phi'(s^\alpha)\, \alpha s^{\alpha-1}\, ds.$$

Siccome ϕ è derivabile q.o., anche g è derivabile q.o. e inoltre $g'(x) = \phi'(x^\alpha)\, \alpha x^{\alpha-1}$. Di conseguenza

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(s)\,ds, \qquad x \in [0,1].$$

Con argomento analogo si vede che

$$\int_0^1 |g'(x)|\,dx = \int_0^1 |\phi'(s^\alpha)|\, \alpha s^{\alpha-1}\,ds = \int_0^1 |\phi'(t)|\,dt < \infty.$$

Dunque: $g' \in L^1(0,1)$ e vale il TFCI $\Rightarrow f \in AC([0,1])$.

L'argomento precedente funziona $\forall \alpha > 0$. Quando $\alpha \geq 1$ si può fare anche nel seguente modo. Per $\alpha \geq 1$ esiste $0 < C_\alpha < \infty$ tale che $|x^\alpha - y^\alpha| \leq C_\alpha |x-y|$ $\forall x,y \in [0,1]$. Si prova col Teorema di Lagrange. Dunque

$$\sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N (\beta_i^\alpha - \alpha_i^\alpha) < C_\alpha \delta$$

e quindi
$$\sum_{i=1}^N |g'(\beta_i) - g(\alpha_i)| = \sum_{i=1}^N |\phi(\beta_i^\alpha) - \phi(\alpha_i^\alpha)| < \varepsilon$$

per l'assoluta continuità di ϕ.

(iii) Non è vero in generale. Si consideri

$$\phi(x) = \frac{1}{4} x^\alpha \left(2 + \sin(1/x)\right), \qquad x \in]0,1]$$

e $\phi(0) = 0$, che è $AC([0,1])$ per $\alpha > 1$.

La funzione $\psi(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, è pure $AC([0,1])$.

Consideriamo la composizione $h = \psi \circ \phi$ che è

$$h(x) = \frac{1}{2}\, x^{\alpha/2} \sqrt{2 + \sin(1/x)}\,, \quad x \in [0,1].$$

La sua derivata è

$$h'(x) = \frac{\alpha}{4}\, x^{\frac{\alpha}{2}-1} \sqrt{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{4}\, x^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}.$$

Si osserva che

$$\frac{1}{x^{2-\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \in L^1(0,1) \iff 2 - \frac{\alpha}{2} < 1 \iff \alpha > 2.$$

Dunque con la scelta $1 < \alpha \leq 2$ si ha $\phi \in AC([0,1])$ ma $h \notin AC([0,1])$.

$\square$