Analisi Reale

Scritto del 27 Giugno 2016

Esercizio 1 (12 punti) Data una funzione $\varphi \in L^1(0,1)$, consideriamo la funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(xy)dy, \quad x \in (0,1).$$

i) Provare che $f \in C(0,1)$.

ii) Provare che f è derivabile q.o. su $(0,1)$.

iii) Provare che $f' \in L^1_{\text{loc}}(0,1)$.

Esercizio 2 (12 punti) Siano $I = [-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}$ e $Q = I \times I \subset \mathbb{R}^2$ e siano χ_I e χ_Q le rispettive funzioni caratteristiche.

i) Calcolare la funzione $F(x) = \chi_I * \chi_I(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

ii) Calcolare la funzione $G(x,y) = \chi_Q * \chi_Q(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 (8 punti) Sia $g \in L^1([0,1])$ una funzione tale che $g(x) \geq x/2$ per ogni $x \in [0,1]$. Supponiamo che per ogni intervallo $I \subset [0,1]$ valga

$$\int_I g(x)dx \leq \int_I \sqrt{2xg(x) - x^2}dx.$$

Provare che $g(x) = x$ per q.o. $x \in [0,1]$.

---

2 ore e 15 minuti a disposizione

Esercizio Da $\varphi \in L^1(0,1)$, consideriamo la funzione $f:(0,1)\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(xy)\,dy, \qquad x\in(0,1).$$

i) Provare che $f \in C(0,1)$.

ii) Provare che f è derivabile q.o. su $(0,1)$.

iii) Provare che $f' \in L^1_{loc}(0,1)$.

Soluzione. i) Con il cambio di variabile $t = xy$:

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\frac{1}{x}\,dt = \frac{1}{x}\,\Phi(x)$$

dove $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$. Siccome $\varphi \in L^1(0,1)$ segue che $\Phi \in AC([0,1])$. In particolare $\Phi(x)$ è continua. Dunque $f(x) = \frac{1}{x}\Phi(x)$ è continua nei punti $x\in(0,1]$.

ii) Siccome $\Phi \in AC([0,1])$ per q.o. $x\in(0,1)$ esiste

$$\Phi'(x) = \varphi(x).$$

Dunque f è derivabile q.o. su $(0,1)$ e inoltre

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\Phi(x) + \frac{1}{x}\,\varphi(x)$$

iii) Chiaramente, si ha $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2} \in L^\infty_{loc}(0,\infty)$ e inoltre $\Phi, \varphi \in L^1(0,1)$. Segue che $f' \in L^1_{loc}(0,1)$.

$\square$

Esercizio Siano $I = [-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}$ e $Q = I \times I \subset \mathbb{R}^2$ e siano χ_I e χ_Q le rispettive funzioni caratteristiche.

(i) Calcolare la funzione $F(x) = \chi_I * \chi_I(x)$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) Calcolare la funzione $G(x,y) = \chi_Q * \chi_Q(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

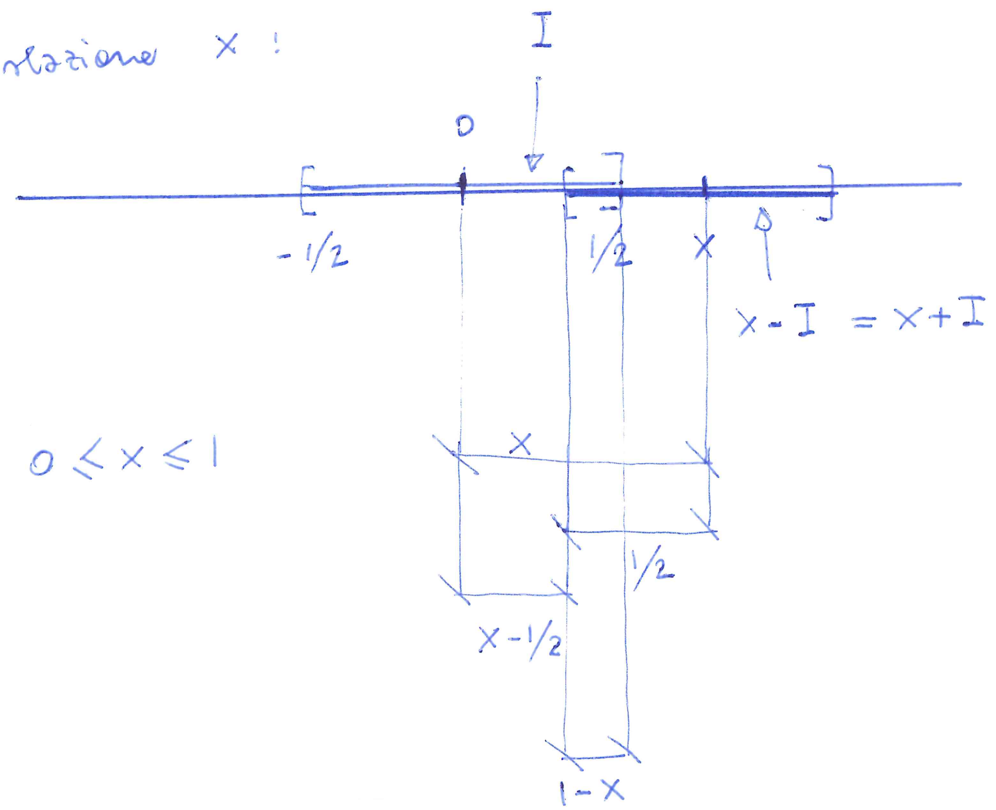
Soluzione (i) Abbiamo:

$$F(x) = \chi_I * \chi_I(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_I(x-y)\, \chi_I(y)\, dy =$$

$$= \int_I \chi_I(x-y)\, dy = \mathcal{L}^1(\{y \in I : x-y \in I\})$$

$$= \mathcal{L}^1(I \cap (x-I))$$

dove $x - I$ indica il traslato di $-I = I$ per il fattore di traslazione x:



Dunque $F(x) = 1 - |x|$, quando $|x| \leq 1$.

Mentre $F(x) = 0$ per $|x| > 1$ in quanto $I \cap (x-I) = \emptyset$.

ii) Osserviamo che $\chi_Q(x,y) = \chi_I(x)\,\chi_I(y)$.

Dunque

$$G(x,y) = \int_Q \chi_Q(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint_{I\times I} \chi_I(x-\xi)\,\chi_I(y-\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\overset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \left(\int_I \chi_I(x-\xi)\, d\xi\right)\left(\int_I \chi_I(y-\eta)\, d\eta\right)$$

$$= F(x)\,F(y).$$

$\square$

Esercizio Sia $g \in L^1([0,1])$ una funzione tale che $g(x) \geq x/2$ per ogni $x \in [0,1]$. Supponiamo che per ogni intervallo $I \subset [0,1]$ valga

$$\int_I g(x)\,dx \leq \int_I \sqrt{2xg(x) - x^2}\,dx.$$

Provare che $g(x) = x$ per q.o. $x \in [0,1]$.

Soluzione. Preso $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ con $x_0 \in (0,1)$ ed $r > 0$, avremo:

$$\frac{1}{2r} \int_{[x_0-r, x_0+r]} g(x)\,dx \leq \frac{1}{2r} \int_{[x_0-r, x_0+r]} \sqrt{2xg(x) - x^2}\,dx.$$

Per il Teorema di differenziazione di Lebesgue, per q.o. $x_0 \in (0,1)$ si ha

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{[x_0-r, x_0+r]} g(x)\,dx = g(x_0)$$

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{[x_0-r, x_0+r]} \sqrt{2xg(x) - x^2}\,dx = \sqrt{2x_0 g(x_0) - x_0^2}.$$

Quindi

$$g(x_0) \leq \sqrt{2x_0 g(x_0) - x_0^2} \qquad \text{per q.o. } x_0$$

che equivale a:

$$\varrho(x_0)^2 \leqslant 2x_0\varrho(x_0) - x_0^2 \iff (\varrho(x_0) - x_0)^2 \leqslant 0 .$$

Questo implica che $\varrho(x_0) = x_0$ per q.o. $x_0 \in (0,1)$.

$\square$