Analisi Reale

Scritto del 31 Agosto 2016

Esercizio 1 (10 punti) Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}$ e, data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ per ogni $A \subset \mathbb{R}$.

i) Provare che ν è una misura esterna su $\mathbb{R}$.

ii) Supponiamo che μ sia una misura di Borel e che f sia di Borel (ovvero che $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}$ è di Borel se $B \subset \mathbb{R}$ è di Borel). Provare che ν è una misura sulla σ-algebra di Borel.

Esercizio 2 (10 punti) Rispondere alle domande i) e ii):

i) Provare che $e^t \geq 1 + t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ con uguaglianza se e solo se $t = 0$.

ii) Sia $f \in L^1([0,1])$ una funzione tale che

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{[0,1]} e^{f(x)}dx \leq 1.$$

Provare che $f(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$.

Esercizio 3 (12 punti) Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni definita nel seguente modo:

$$f_n(x) = \sqrt{n} \qquad \text{se } x \in [0, 1/n] \qquad \text{ed} \qquad f_n(x) = 0 \quad \text{altrimenti.}$$

i) Per ogni $p \in [1, \infty)$ stabilire se la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente in $L^p([0,1])$.

ii) Provare che per $p \leq 2$ la successione converge debolmente in $L^p([0,1])$.

iii) Provare che per $p > 2$ la successione non converge debolmente in $L^p([0,1])$.

Sugg. iii) Funzione test $g(x) = 1/x^\alpha$ con $\alpha > 0$ da discutere.

---

3 ore a disposizione

<u>Esercizio</u> Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}$ e, data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ per $A \subset \mathbb{R}$.

i) Provare che ν è una misura esterna su $\mathbb{R}$.

ii) Supponiamo che μ sia una misura di Borel e che f sia di Borel. Provare che ν è una misura sulla σ-algebra dei Boreliani.

Soluzione. i) Controlliamo gli assiomi di una misura esterna:

(j) $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.

(jj) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \Rightarrow \mu(f^{-1}(A)) \leq$
$\leq \mu(f^{-1}(B))$

e quindi $\nu(A) \leq \nu(B)$.

(jjj) Sappiamo che

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

e quindi

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \; \# =$$

$$\# = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(A_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

ii) Siano B_n, $n \in \mathbb{N}$, Boreliani disgiunti.

Allora
$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$$

con unione disgiunta

dove $f^{-1}(B_n)$ sono Boreliani. Dunque:

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)\right) \underset{\mu \text{ misura}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(f^{-1}(B_n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n).$$

Esercizio. i) Provare che $e^t \geq 1+t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ con uguaglianza se e solo se $t=0$.

ii) Sia $f \in L^1([0,1])$ una funzione tale che

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = 0 \qquad e \qquad \int_{[0,1]} e^{f(x)}\,dx \leq 1 .$$

Provare che $f(x)=0$ per q.o. $x \in [0,1]$.

Soluzione. i) La derivata di $\phi(t) = e^t - t - 1$ è $\phi'(t) = e^t - 1$ e quindi $\phi'(t) > 0$ per $t>0$ e $\phi'(t) < 0$ per $t<0$. Dunque $t=0$ è il punto unico di minimo assoluto e $\phi(0)=0$. Dunque $\phi(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\phi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

ii) Abbiamo

$$1 \overset{\text{ipotesi}}{\geq} \int_{[0,1]} e^{f(x)}\,dx \overset{i)}{\geq} \int_{[0,1]} (1+f(x))\,dx \overset{\text{ipotesi}}{=} \int_{[0,1]} 1\,dx = 1$$

Quindi si hanno tutte uguaglianze ed in particolare:

$$\int_{[0,1]} e^{f(x)}\,dx = \int_{[0,1]} (1+f(x))\,dx$$

ovvero

$$\int_{[0,1]} \left(e^{f(x)} - (1+f(x))\right) dx = 0$$

dove $e^{f(x)} - (1+f(x)) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$

Dato $\varepsilon > 0$ definiamo $A_\varepsilon = \{ x \in [0,1] : e^{f(x)} - (1 + f(x)) \geq \varepsilon \}$.

Allora:

$$0 = \int_{[0,1]} \left(e^{f(x)} - (1 + f(x)) \right) dx \geq \int_{A_\varepsilon} (\dots) \, dx \geq$$

$$\geq \varepsilon \, \mathcal{L}^1 (A_\varepsilon)$$

da cui si deduce che $\mathcal{L}^1 (A_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Questo prova che $e^{f(x)} - (1 + f(x)) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$

ovvero $f(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$, per il punto i).

Esercizio Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{n} \quad \text{se} \quad x \in [0, 1/n]$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{altrimenti}$$

i) Per ogni $p \in [1,\infty)$ stabilire se la successione converge fortemente in $L^p([0,1])$.

ii) Provare che per $p \in [1,2]$ la successione converge debolmente in $L^p([0,1])$.

iii) Provare che per $p > 2$ la successione non converge debolmente in $L^p([0,1])$.

Soluzione. i) Per $x \in (0,1]$ si ha il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Dunque, se esiste, il limite forte deve essere $f = 0$.
Esaminiamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n(x)|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1/n]} n^{p/2} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{p}{2}-1} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p \in [1,2) \\ 1 & \text{se} \quad p = 2 \\ \infty & \text{se} \quad p > 2 . \end{cases}$$

Dunque, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente $\iff p \in [1,2)$.

ii) Siccome la convergenza forte implica quella debole, allora

$$p \in [1,2) \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge debolmente a zero.}$$

Esaminiamo il caso $p=2$. Sia $g \in L^2([0,1])$:

$$\left| \int_{[0,1]} f_n(x)\, g(x)\, dx \right| = \left| \int_{[0,1/n]} \sqrt{n}\; g(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{n} \int_{[0,1/n]} |g(x)|\, dx \leq \sqrt{n} \left(\int_{[0,1/n]} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[0,1/n]} g(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{[0,1/n]} g(x)^2 dx \right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

per convergenza dominata, essendo $g^2 \in L^1(0,1)$.

iii) Consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x>0$, dove $\alpha>0$ è un parametro da discutere.

Sia $p>2$ e sia $q \in (1,2)$ l'esponente di Hölder coniugato: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$.

Allora:

$$g \in L^q(0,1) \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^q dx < \infty$$

dove

$$\int_0^1 x^{-\alpha \frac{p}{p-1}}\, dx = \left[x^{1-\frac{\alpha p}{p-1}} \right]_{x=0}^{x=1} \frac{1}{1-\frac{\alpha p}{p-1}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\frac{\alpha p}{p-1}} & \text{se } 1-\dfrac{\alpha p}{p-1} > 0 \\ \infty & \text{se } 1-\dfrac{\alpha p}{p-1} < 0 \end{cases}$$

Nel caso $1-\dfrac{\alpha p}{p-1} = 0$ l'integrale è ∞.

Inoltre

$$1-\frac{\alpha p}{p-1} > 0 \iff 1 > \frac{\alpha p}{p-1} \iff \alpha < \frac{p-1}{p}.$$

Adesso esaminiamo

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_{[0,1/n]} \sqrt{n}\; x^{-\alpha}\, dx \underset{(\alpha<1)}{=}$$

$$= \sqrt{n} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{x=0}^{x=1/n} = \frac{1}{1-\alpha}\, n^{\frac{1}{2}}\, n^{\alpha-1}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\, n^{\alpha - 1/2} \longrightarrow +\infty \quad \text{se } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Dunque se $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{p-1}{p}$ esiste $g \in L^q(0,1)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, g(x)\, dx = \infty .$$

Perciò un tale α esista deve essere verificata la condizione:

$$\frac{1}{2} < \frac{p-1}{p} \iff p < 2p-2 \iff p > 2,$$

che è esattamente il nostro caso. $\square$