Analisi Reale

Scritto del 4 Febbraio 2016

Esercizio 1 (12 punti) Dati uno spazio di misura $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ed $s > 0$, definiamo $\mu^s : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$

$$\mu^s(E) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)^s \, : \, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in \mathscr{A} \Big\}.$$

i) Provare che μ^s è una misura esterna su X.

ii) Dato $A \in \mathscr{A}$, provare che $\mu(A)^s \leq \mu^s(A)$ per $0 < s \leq 1$.

Sugg.: ii) $(x+y)^s \leq x^s + y^s$ per $x, y \geq 0$ ed $s \in (0,1]$

Esercizio 2 (12 punti) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che F è effettivamente definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

ii) Provare che $F \in C^1(\mathbb{R})$.

iii) Calcolare F' e quindi una formula esplicita per F.

iv) Provare che $F \notin C^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 (8 punti) Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni misurabili tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p \in L^1(0,1),$$

dove $1 \leq p < \infty$ è un parametro. Vogliamo studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n^{3/4}}, \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che per $1 \leq p < 4$ la serie converge in $L^1(0,1)$.

ii) Discutere la convergenza in $L^1(0,1)$ della serie quando $p \geq 4$.

Sugg.: i) $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ per $x, y \geq 0$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

---

2 ore e 45 minuti a disposizione

Esercizio 1 Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $s>0$.

Definiamo $\mu^s : P(X) \to [0,\infty]$

$$\mu^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

i) Provare che μ^s è una misura esterna su X.

ii) Dato $A \in \mathcal{A}$, provare che $\mu^s(A) \geq \mu(A)^s$ per $s \in (0,1]$ e $\mu^s(A) \leq \mu(A)^s$ per $s \geq 1$.

Soluzione. i) Dobbiamo verificare che:

1) $\mu^s(\emptyset) = 0$

2) $\mu^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^s(E_n)$, $E_n \in \mathcal{A}$.

La 1) è immediata. Proviamo la 2). Possiamo supporre che $\mu^s(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, altrimenti la 2) è banalmente vera. Esistono $A_{nj} \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, tali che

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{nj}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj})^s \leq \mu^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

dove abbiamo fissato una $\varepsilon > 0$. Dunque

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{nj}$$

e pertanto

$$\mu^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n,j=1}^{\infty} \mu(A_{nj})^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} =$$

$$= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^s(E_n).$$

Con $\varepsilon \to 0^+$ si ottiene la tesi.

ii) Ricordiamo che $(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha$ se $\alpha \in (0,1]$, $x,y \geq 0$.
Per induzione e passaggio al limite

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)^\alpha \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^\alpha , \qquad \alpha \in (0,1], \quad x_i \geq 0.$$

Siano $A \in \mathcal{A}$ e $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$.
Senza perdere di generalità possiamo supporre

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con unione disgiunta}$$

(sostituiamo A_n con $A \cap A_n \in \mathcal{A}$ e poi disgiungiamo)
Dunque per $s \in (0,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)^s \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\right)^s = \mu(A)^s$$

e passando all'inf sulle somme si trova

$$\mu^s(A) \geq \mu(A)^s.$$

In modo analogo, usando $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$ per $\alpha \geq 1$ si discute l'altro caso.

Esercizio 2 Sia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)}\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che F è ben definita.

ii) Provare che $F \in C^1(\mathbb{R})$.

iii) Calcolare F' e quindi F in forma esplicita.

iv) Provare che $F \notin C^2(\mathbb{R})$.

Soluzione i) usando $|\arctan(tx)| \le |tx|$ si trova

$$\int_0^\infty \left| \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)} \right| dt \le |x| \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}|x| < \infty.$$

L'integranda è integrabile $\forall x \in \mathbb{R}$. La stessa maggiorazione fornisce la maggiorante in $L^1(\mathbb{R})$ per la convergenza dominata. Quindi $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \int_0^\infty \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \lim_{x \to x_0} \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)}\,dt = F(x_0).$$

Ovvero $F \in C(\mathbb{R})$

ii) Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)} = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \le \frac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

Quindi è corretto dire che:

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt$$

Con la stessa maggiorante e convergenza dominata si vede che

$$x \longmapsto F'(x) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt$$

è continua su $\mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R})$.

iii) Calcoliamo l'integrale con i "fratti semplici":

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{A}{1+t^2} + \frac{B}{1+x^2t^2} = \frac{A + Ax^2t^2 + B + Bt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ Ax^2+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A - x^2A = 1 \\ B = -x^2A \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{1-x^2} \\ B = -\dfrac{x^2}{1-x^2} \end{cases}$$

Il conto è possibile quando $x^2 \neq 1$. Dunque

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^\infty \frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{1}{1+x^2t^2}\,dt \qquad t = \frac{s}{x}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{1-x^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}\,\frac{1}{x}\,ds \qquad \left(\begin{array}{c}\text{con } x>0 \\ +\infty \to +\infty\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1-x^2}(1-x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x}$$

Questa formula è corretta per $x>0$ ed $x \neq 1$.
Siccome $F \in C^1(\mathbb{R})$ si estende anche per $x = 1$.

Siccome $F'(x)$ è pari (si vede dalla formula integrale) deduciamo che

$$F'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da qui si vede subito che $F \notin C^2(\mathbb{R})$ perché F' non è derivabile in $x=0$.

Chiaramente $F(0)=0$ e quindi

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\,dt = \int_0^x \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|t|}\,dt$$

e per $x>0$ si trova

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{2} \log(1+x).$$

Siccome F è dispari, avremo:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \log(1+x) & \text{per } x \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2} \log(1+|x|) & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 3 Siano $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, misurabili tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p \in L^1(0,1)$$

per un parametro $1 \leq p < \infty$.

i) Provare che per $1 \leq p < 4$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n^{3/4}} \quad , \quad x \in [0,1]$$

converge in $L^1(0,1)$

ii) Discutere la convergenza in $L^1(0,1)$ quando $p \geq 4$.

Soluzione. Ricordiamo che $xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$ per $x, y \geq 0$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dunque

$$\frac{|f_n(x)|}{n^{3/4}} \leq \frac{1}{p} |f_n(x)|^p + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{n^{3/4}} \right)^q$$

Integrando e sommando

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x)|}{n^{3/4}} dx \leq \frac{1}{p} \int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p dx +$$

$$+ \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{3/4}} \right)^q$$

Abbiamo $q = \frac{p}{p-1}$. Quindi la serie converge se e solo se

$$1 < \frac{3}{4} q = \frac{3}{4} \frac{p}{p-1} \iff 4p - 4 < 3p \iff p < 4$$

Questo prova che:

$$1 \leq p < 4 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n|}{n^{3/4}} \quad \in L^1(0,1).$$

ii) Cerchiamo di provare che per $p \geq 4$ l'implicazione non è più necessariamente vera. Per semplicità cerchiamo un controesempio fatto di funzioni f_n costanti. Vogliamo avere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p < \infty \qquad \text{MA} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^{3/4}} = \infty$$

dove $f_n > 0$ sono numeri e $p \geq 4$.

Una possibilità è questa:

$$f_n^p = \frac{1}{n \log^2 n} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \frac{1}{n^{1/p} (\log n)^{2/p}}$$

dove $n \geq 2$. Sappiamo che (usare criterio Cauchy)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} < \infty.$$

(Usare Cauchy)

Tuttavia:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{n^{3/4}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p + 3/4} (\log n)^{2/p}} = \infty$$

in quanto $\frac{1}{p} + \frac{3}{4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow p \geq 4$

(è il nostro caso) e inoltre

$$\frac{2}{p} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \geq 2.$$

$\square$