Analisi Reale

Scritto del 5 Febbraio 2015

Esercizio 1 (10 punti) Stabilire se la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log^2(x/2)} \sin\big(\log x\big), & \text{se } x \in (0,1], \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è assolutamente continua su $[0,1]$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\log(x+t)}{1+t} dt, \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che f è continua su $[0,1]$.

ii) Provare che f è derivabile in $]0,1]$.

iii) Stabilire se $f' \in L^1(0,1)$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $E, E_n \subset [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, insiemi misurabili e siano $f = \chi_E$ ed $f_n = \chi_{E_n}$ le rispettive funzioni caratteristiche. Provare che per un qualsiasi $1 \le p < \infty$ sono equivalenti:

A) $f_n \to f$ in $L^p(0,1)$ forte.

B) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$ debole.

2.30 ore a disposizione

Esercizio Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\log(x+t)}{t+1}\, dt, \qquad x \in [0,1]$$

i) Provare che $f \in C([0,1])$;
ii) Provare che f è derivabile su $]0,1]$;
iii) Stabilire se $f' \in L^1(0,1)$.

Soluzione. i) Osserviamo che per $t>0$ e per $x>0$

$$\log(t) \leq \log(x+t)$$

Ed in particolare per $0 < t, x < \frac{1}{2}$:

$$|\log(x+t)| \leq |\log t| \in L^1$$

Per parti si vede che $\int_0^1 |\log t|\, dt = 1 < \infty$.
Le stime precedenti servono per la continuità in $x=0$.
(Per $x \in (0,1]$ è tutto più facile.)
Dunque per convergenza dominata $\forall x_0 \in [0,1]$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \int_0^1 \lim_{x\to x_0} \frac{\log(x+t)}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{\log(x_0+t)}{t+1}\, dt = f(x_0).$$

ii) Formalmente:

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{\log(x+t)}{(t+1)}\, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\log(x+t)}{(t+1)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+x)}\, dt.$$

Se $0 < \delta \leq x \leq 1$ si ha $\dfrac{1}{(t+1)(t+x)} \leq \dfrac{1}{(t+1)(t+\delta)} \in L^1(0,1)$.
Quindi si può derivare sotto segno di integrale e

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+x)}\, dt.$$

(ii) Osserviamo che $f'(x) > 0$ ed anche $f' \in C(]0,1])$.
Dunque $x \mapsto f'(x)$ è misurabile.
Per il Teorema di Tonelli:

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{(t+1)(t+x)}}_{\geq 0} dt \Big) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t+1} \Big(\int_0^1 \frac{1}{t+x}\,dx \Big) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t+1} \Big[\log(t+x) \Big]_{x=0}^{x=1} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\log(t+1) - \log t}{t+1}\,dt$$

Chiaramente $\dfrac{\lg(t+1)}{t+1} \in L^1(0,1)$ (l'integrale si calcola)

Inoltre

$$\Big| -\frac{\lg t}{t+1} \Big| \underset{t \in [0,1]}{\leq} |\log t| \in L^1(0,1)$$

Questo prova che $\int_0^1 f'(x)\,dx < \infty$. $\square$

Esercizio Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log^2(x/2)} \sin(\log x) & x \in]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Provare che $f \in AC([0,1])$.

Soluzione. Siccome $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$
f è continua su $[0,1]$. Chiaramente $f \in C^\infty(]0,1])$.

Dunque se $0 < y < x \leq 1$ si ha

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\, dt$$

Se la formula vale anche per $y = 0$, allora $f \in AC([0,1])$
Se $f' \in L^1(0,1)$ allora certamente

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Calcolo:

$$f'(x) = -\frac{2}{x}\left(\log(x/2)\right)^{-3} \sin(\log x) + \frac{1}{x \log^2(x/2)} \cos(\log x)$$

$0 < x \leq 1$

Osserviamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{x \log^2(x/2)}\, dx = \left[-\left(\log(x/2)\right)^{-1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\log 2} < \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x\,|\log(x/2)|^3}\, dx = -\left[-\left(\log(x/2)\right)^{-2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(\log 2)^2} < \infty$$

Segue che $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{x} \dfrac{1}{|\log(x/2)|^3} + \dfrac{1}{x \log^2(x/2)} \in L^1(0,1)$

$\square$

Esercizio Siano $E, E_n \subset [0,1]$ insiemi misurabili siano $f = \chi_E$ ed $f_n = \chi_{E_n}$, sia $1 \le p < \infty$. Provare che sono equivalenti:

A) $f_n \to f$ in $L^p(0,1)$ forte

B) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$ debole

Soluzione. A) $\Rightarrow$ B) sempre vera.

B) $\Rightarrow$ A). Osservo che per ogni $1 \le p < \infty$ si ha

$$|\chi_{E_n} - \chi_E|^p = |\chi_{E_n} - \chi_E|^2 = \chi_{E_n}^2 - 2\chi_{E_n}\chi_E + \chi_E^2 =$$

$$= \chi_{E_n} - 2\chi_{E_n}\chi_E + \chi_E$$

Siccome $f = \chi_E \in L^{p'}(0,1)$ $\forall p \in [1,\infty)$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \chi_{E_n}\chi_E \, dx = \int_{[0,1]} \chi_E \chi_E \, dx = \int_{[0,1]} \chi_E dx = \mathcal{L}^1(E)$$

Siccome $1 \in L^{p'}(0,1)$ $\forall p \in [1,\infty)$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \chi_{E_n} dx = \int_{[0,1]} \chi_E \, dx = \mathcal{L}^1(E)$$

In conclusione:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |\chi_{E_n} - \chi_E|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \left(\chi_{E_n} - 2\chi_{E_n}\chi_E + \chi_E\right) dx$$

$$= \mathcal{L}^1(E) - 2\mathcal{L}^1(E) + \mathcal{L}^1(E) = 0$$

$\square$

Analisi Reale

Scritto del 23 Febbraio 2015

Esercizio 1 (10 punti) Sia $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}} & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Determinare tutti i $p \in [1, \infty)$ tali che $f \in L^p(Q)$ e per tali valori calcolare $\|f\|_p$.

Esercizio 2 Per ciascun $A \subset [0,1]$ definiamo

$$\mu(A) = \sqrt{\mathscr{L}^1(A)} \quad \text{e} \quad \nu(A) = \sqrt{\operatorname{diam}(A)} = \sup\{\sqrt{|x-y|} \in \mathbb{R} : x, y \in A\},$$

dove $\mathscr{L}^1$ è la misura esterna di Lebesgue.

i) (7 punti) Stabilire se μ e ν sono misure esterne su $[0,1]$.

ii) (3 punti) Stabilire se μ e ν sono misure Boreliane su $[0,1]$.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2 t)}{(1 + x^2 t^2)^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

È da intendersi $f(0) = 0$.

i) (4 punti) Provare che f è continua in ogni punto $x \neq 0$.

ii) (4 punti) Provare che f è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.

iii) (2 punti) Provare che f non è continua in $x = 0$.

iv) (Facoltativo) Provare che $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

---

3 ore a disposizione

Esercizio Sia $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ e definiamo

$f: Q \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Calcolare tutti i $1 \leq p < \infty$ tali che $f \in L^p(Q)$.

Soluzione. f è chiaramente misurabile. Dobbiamo determinare i $p \geq 1$ tali che

$$\int_Q \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dx\, dy < \infty$$

Posso usare il Teorema di Tonelli

$$\int_Q \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy \right) dx$$

dove

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy = \int_0^x \frac{1}{(x-y)^{p/2}}\, dy + \int_x^1 \frac{1}{(y-x)^{p/2}}\, dy$$

$p \neq 2$

$$= \left[\frac{-(x-y)^{-\frac{p}{2}+1}}{-\frac{p}{2}+1} \right]_{y=0}^{y=x} + \left[\frac{(y-x)^{-\frac{p}{2}+1}}{-\frac{p}{2}+1} \right]_{y=x}^{y=1}$$

Quando $p = 2$ le primitive sono logaritmi.

Se $p > 2$ ed anche se $p = 2$ si vede che

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy = \infty \quad \forall x \in [0,1].$$

Quando $1 \leq p < 2$ si trova

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy = \frac{x^{1-p/2}}{1-p/2} + \frac{(1-x)^{1-p/2}}{1-p/2}$$

e dunque

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{p/2}}\, dy \overset{\text{simmetria}}{=} 2 \int_0^1 \frac{x^{1-p/2}}{1-p/2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{(1-p/2)(2-p/2)} \cdot \left[x^{2-p/2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{(1-p/2)(2-p/2)}$$

Conclusione:

$$\|f\|_p = \left(\frac{2}{(1-p/2)(2-p/2)} \right)^{1/p} .$$

Esercizio Per ogni $A \subset [0,1]$ si definiscano

$$\mu(A) = \sqrt{\mathcal{L}^1(A)} \qquad e \qquad \nu(A) = \sqrt{\operatorname{diam} A}$$
$$= \sup\{\sqrt{|x-y|} : x, y \in A\}.$$

1) Stabilire se μ e ν sono misure esterne su $[0,1]$

2) Stabilire se μ e ν sono misure Boreliane su $[0,1]$.

Soluzione. 1) Se $A = \{x, y\}$ con $x, y \in [0,1]$ e $x \neq y$ allora

$$\nu(A) = \sqrt{|x-y|} \neq 0$$
$$\nu(\{x\}) = 0 \quad e \quad \nu(\{y\}) = 0$$

Dunque

$$0 \neq \nu(A) = \nu(\{x\} \cup \{y\}) > \nu(\{x\}) + \nu(\{y\}) = 0$$

Dunque ν non è subadditiva e pertanto non è una misura esterna.

Affermo che μ è una misura esterna. Infatti:

(1) $\mu(\emptyset) = \sqrt{\mathcal{L}^1(\emptyset)} = \sqrt{0} = 0$

(2) Provo che
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

con $A_n \subset [0,1]$.

Considero la funzione $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$.

Chiaramente

$$\sqrt{t+s} = \varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s) = \sqrt{t} + \sqrt{s}$$

(Elevare al quadrato).

Quindi per induzione si trova

$$\varphi(t_1+\dots+t_n) \leq \varphi(t_1)+\dots+\varphi(t_n)$$

e passando al limite (φ è continua):

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n).$$

Di conseguenza

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sqrt{\mathcal{L}^1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_n)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mathcal{L}^1(A_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2) ν non può essere una misura (Boreliana) per quanto visto al punto 1).

Proviamo che μ NON è una misura Boreliana.

Gli insiemi $[0,1]$, $[0,1/2]$ e $(1/2,1]$ sono Boreliani e $[0,1] = [0,1/2] \cup (1/2,1]$ disgiunta.

Inoltre

$$\mu([0,1]) = 1, \quad \mu([0,1/2]) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad \mu((\tfrac{1}{2},1]) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

e dunque

$$\mu([0,1]) = 1 < \sqrt{2} = \mu([0,1/2]) + \mu((1/2,1]).$$

Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Provare che f è continua in ogni punto $x \neq 0$.
2) Provare che f è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.
3) Provare che f non è continua in $x = 0$.
4) Provare che $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(0) = 0$ e che per $x \neq 0$ si ha

$$\frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Quindi f è ben definita.

i) Se $|x| \geq \delta > 0$ si ha

$$\left| \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+\delta^2 t^2)^2} \in L^1(\cancel{\mathbb{R}}[0,\infty))$$

Quindi per il Teorema della convergenza dominata per ogni $x_0 \neq 0$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \int_0^\infty \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x^2 t)}{(1+x^2t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin(x_0^2 t)}{(1+x_0^2t^2)^2}\, dt = f(x_0).$$

Z

2) Cambio di variabile $t = \frac{1}{x} s$, $dt = \frac{1}{x} ds$,

$$f(x) \overset{x\neq 0}{=} \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} \, ds$$

È sufficiente provare che

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} \, ds$$

è derivabile. Formalmente:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} \, ds = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2} \, ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{s \cos(xs)}{(1+s^2)^2} \, ds$$

Chiaramente

$$\left| \frac{s \cos(xs)}{(1+s^2)^2} \right| \leq \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \in L^1([0,\infty))$$

Questo rende rigorosi i conti precedenti. Quindi f è derivabile per $x \neq 0$.

3) Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{x(1+s^2)^2} \, ds =$$

$$\overset{\text{se lecito}}{=} \int_0^\infty \lim_{x\to 0} \frac{\sin(xs)}{x(1+s^2)^2} \, ds = \int_0^\infty \frac{s}{(1+s^2)^2} \, ds,$$

Usando la stima nota

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq 1 \qquad \forall t$$

si trova

$$\left| \frac{\sin(xs)}{x\,(1+s^2)^2} \right| = \left| \frac{\sin(xs)}{xs} \cdot \frac{s}{(1+s^2)^2} \right| \leq \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \in L^1([0,\infty))$$

Questo giustifica il passaggio al limite nell'integrale.

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^\infty \frac{s}{(1+s^2)^2}\, ds \neq 0 = f(0)$$

ovvero f non è continua in $x=0$.

4) La derivata di f è:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^\infty \frac{\sin(xs)}{(1+s^2)^2}\, ds + \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{s\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\, ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{xs\cos(xs) - \sin(xs)}{x^2\,(1+s^2)^2}\, ds$$

Osserviamo che

$$\left| \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \right| \leq C < +\infty \qquad \forall t$$

e

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = 0$$

Quindi si può passare col limite nell'integrale:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \int_0^\infty \frac{xs\cos(xs) - \sin(xs)}{s^2x^2 (1+s^2)^2} s^2 ds$$

$$= \int_0^\infty \lim_{x \to 0} \frac{xs\cos(xs) - \sin(xs)}{s^2x^2} \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds$$

$$= 0 .$$

$\square$

Analisi Reale

Scritto del 15 Giugno 2015

Esercizio 1 (10 punti) Su $\mathbb{R}$ fissiamo la misura di Lebesgue.

i) Trovare, se possibile, una successione di numeri reali $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^k \chi_{[0,1]}(x)$ converga a zero in $L^1(\mathbb{R})$ ma non in $L^2(\mathbb{R})$.

ii) Trovare, se possibile, una successione reale $c_k > 0$ tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^{-1-1/k}\chi_{[1,\infty[}(x)$ converga a zero in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$.

iii) Trovare, se possibile, una successione di funzioni $f_k \in L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ che tenda a zero in $L^2([0,1])$ ma non in $L^1([0,1])$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Supponendo $\varphi \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ provare che $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dedurne che $\varphi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$, per qualche costante $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Provare che se φ è misurabile allora φ è ancora della forma $\varphi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$.

iii) (Facoltativo) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Provare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Sugg.: i) $(\varphi(x+h) - \varphi(x))/h = ((\varphi(h) - \varphi(0))/h)\varphi(x)$. ii) Regolarizzazione.

Esercizio 3 (10 punti) Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$.

i) Provare che la formula

$$\varphi(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y} d\mu(y), \quad x \in [0,1],$$

definisce una funzione $\varphi \in C^1(]0,1];\mathbb{R})$.

ii) Supponiamo che esista $\alpha > 0$ tale che $\mu([0,x]) \leq x^\alpha$ per ogni $x \in [0,1]$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che φ sia assolutamente continua su $[0,1]$.

---

3 ore a disposizione

Esercizio Su $\mathbb{R}$ si fissi la misura di Lebesgue

i) Trovare, se possibile, una successione reale $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, tale che la successione $f_k(x) = c_k x^k \chi_{[0,1]}(x)$ converga a zero in $L^1(\mathbb{R})$ ma non in $L^2(\mathbb{R})$.

ii) Trovare, se possibile, una successione reale $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, tale che la successione di funzioni $f_k(x) = c_k x^{-1-1/k} \chi_{[1,\infty)}(x)$ converga a zero in $L^2(\mathbb{R})$ ma non in $L^1(\mathbb{R})$.

iii) Trovare, se possibile, una successione di funzioni $f_k \in L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ che tenda a zero in $L^2([0,1])$ ma non in $L^1([0,1])$.

Soluzione. i) Conti:

$$\|f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|\, dx = \int_{[0,1]} c_k x^k \, dx = c_k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{c_k}{k+1}$$

$$\|f_k\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|^2 dx \right)^{1/2} = c_k \left(\int_{[0,1]} x^{2k} \, dx \right)^{1/2}$$

$$= c_k \left(\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_{x=0}^{x=1} \right)^{1/2}$$

$$= c_k \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

Con la scelta $c_k = \sqrt{k}$ si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+1} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2k+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

ii) Conti:

$$\|f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|\, dx = \int_{[1,\infty)} c_k\, x^{-1-1/k}\, dx =$$

$$= c_k \left[\frac{x^{-1/k}}{-1/k} \right]_{x=1}^{x=\infty}$$

$$= k\, c_k$$

$$\|f_k\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|^2 dx \right)^{1/2} = c_k \left(\int_{[1,\infty)} x^{-2-2/k}\, dx \right)^{1/2}$$

$$= c_k \left(\left[\frac{x^{-1-2/k}}{-1-2/k} \right]_{x=1}^{x=\infty} \right)^{1/2}$$

$$= c_k \left(\frac{1}{1+2/k} \right)^{1/2} = \frac{c_k \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{k+2}}$$

Con la scelta $c_k = \frac{1}{k}$ si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = 1 \neq 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}} = 0.$$

iii) Dalla disuguaglianza di Hölder segue :

$$\|f_k\|_1 = \int_{[0,1]} |f_k|\,dx \leq \left(\int_{[0,1]} |f_k|^2 dx\right)^{1/2} = \|f_k\|_2$$

e dunque $\|f_k\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \implies \|f_k\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

La successione richiesta non esiste.

$\square$

Esercizio suggerito dal Prof. G. De Marco.

Esercizio Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Supponendo $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ provare che $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dedurne che $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Provare che se φ è misurabile allora φ è ancora della forma $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$.

iii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
Provare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. i)

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x) \cdot \varphi(h) - \varphi(x)}{h}$$

$$= \varphi(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h) - 1}{h} = \varphi(x) \cdot \varphi'(0).$$

Abbiamo usato $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) \cdot \varphi(0)$ da cui $\varphi(0) = 1$.
Integrando l'equazione differenziale $\varphi'(x) = \varphi'(0) \cdot \varphi(x)$ con la condizione iniziale $\varphi(0) = 1$ si trova

$$\varphi(x) = e^{\varphi'(0) x}.$$

Infine:

$$1 = |\varphi(x)|^2 = \varphi(x) \overline{\varphi(x)} = e^{\varphi'(0) x} \cdot e^{\overline{\varphi'(0)} x} = e^{(\varphi'(0) + \overline{\varphi'(0)}) x}$$

Da qui si deduce che $\varphi'(0) + \overline{\varphi'(0)} = 0$ modulo $2\pi i$,
ovvero $\varphi'(0) = i\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) φ è localmente integrabile. Sia $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un nucleo standard di regolarizzazione. Definiamo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, \varphi(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sappiamo che:

a) $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$

b) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Inoltre

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\, \varphi(x-y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\, \varphi(x) \cdot \varphi(-y)\, dy$$

$$= \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\, \varphi(-y)\, dy$$

Dal punto b) e dal fatto che $|\varphi(x)| = 1$
segue che $c_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(y)\, \varphi(-y)\, dy \neq 0$ per
ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Deduciamo che

$$\varphi(x) = \frac{1}{c_\varepsilon}\, \varphi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$$

Dal punto i) segue che $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$ per qualche
$\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) La funzione $\exp(t) = e^{it}$ è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, e quindi la composizione

$$\varphi(x) = e^{if(x)} = \exp(f(x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

è $\mathcal{L}^1$-misurabile. Dal punto i) segue che

$$\circledast \qquad e^{if(x)} = \varphi(x) = e^{i\alpha x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. (In effetti φ verifica le ipotesi $|\varphi(x)| = 1$ e $\varphi(x+y) = e^{if(x+y)} = e^{if(x)+if(y)} = e^{if(x)} \cdot e^{if(y)} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.)

La $\circledast$ equivale a dire che $f(x) - \alpha x \in 2\pi\mathbb{Z}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists k_x \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \quad f(x) = \alpha x + 2k_x\pi .$$

Affermiamo che $k_x = 0 \ \forall x$. Se fosse $k_x \neq 0$ il punto $y = \frac{x}{2k_x}$ verificherebbe

$$f(y) - \alpha y = f\left(\frac{x}{2k_x}\right) - \alpha\frac{x}{2k_x} = \frac{1}{2k_x}\left(f(x) - \alpha x\right) = \pi \notin 2\pi\mathbb{Z},$$

$\square$

Esercizio suggerito dal Prof. G. De Marco.

Esercizio. Sia μ una misura di Borel su $[0,1]$ tale che $\mu([0,x]) \leq x^\alpha$ per ogni $0 \leq x \leq 1$. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che la funzione

$\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$

$$\varphi(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y)$$

sia assolutamente continua su $[0,1]$.

Soluzione. Studiamo preliminarmente la continuità di φ. Bisogna giustificare il passaggio al limite

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \int_{[0,1]} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y)$$

$$(*) \qquad = \int_{[0,1]} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x+y}\, d\mu(y)$$

$$= \varphi(x_0)$$

per ogni $x_0 \in [0,1]$.

Per ogni $x \geq 0$ ed $y \in [0,1]$ si ha

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{y}$$

Se $g(y) = \frac{1}{y} \in L^1([0,1];\mu)$ allora per il Teorema della Convergenza Dominata il passaggio $(*)$ è lecito.

Ora:

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{y}\, d\mu = \int_{[0,1]} \int_0^\infty \chi_{[0,1/y]}(t)\, dt\, d\mu(y) =$$

Fubini-Tonelli

$$= \int_0^\infty \int_{[0,1]} \chi_{[0,1/y]}(t)\, d\mu(y)\, dt$$

$$= \int_0^1 \int_{[0,1]} \chi_{[0,1/y]}(t)\, d\mu(y)\, dt +$$

$$+ \int_1^\infty \int_{[0,1]} \chi_{[0,1/y]}(t)\, d\mu(y)\, dt$$

$$= \int_0^1 \mu\{y \in [0,1] : t \le 1/y\}\, dt +$$

$$+ \int_1^\infty \mu\{y \in [0,1] : t \le 1/y\}\, dt$$

Ora usiamo $\mu([0,1]) \le 1$ e

$$\mu(\{y \in [0,1] : t \le 1/y\}) = \mu([0, \tfrac{1}{t}]) \le \frac{1}{t^\alpha}$$

Dunque

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{y}\, d\mu \le 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\, dt < \infty \quad \text{se } \underline{\underline{\alpha > 1}}.$$

Dunque: $\alpha > 1 \implies \varphi$ continua in $[0,1]$.

(In effetti, con $\alpha = 1$ e $\mu = \mathcal{L}^1$ misura di Lebesgue la funzione

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+y}\, dy$$

NON è nemmeno finito per $x = 0$.)

Formalmente, la derivata di φ è

$$\varphi'(x) = \int_{[0,1]} \frac{-1}{(x+y)^2}\, d\mu(y).$$

Per $x \geq \delta > 0$ si ha

$$\left| \frac{1}{(x+y)^2} \right| \leq \frac{1}{(\delta+y)^2} \in L^1([0,1];\mu)$$

Dunque il passaggio con la derivata dentro l'integrale è lecito in tutti i punti $x \in (0,1]$.
Lo stesso argomento mostra che

$$x \mapsto \varphi'(x) = \int_{[0,1]} \frac{-1}{(x+y)^2}\, d\mu(y)$$

è continua per $x > 0$. Dunque

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt$$

per $0 < x_0 \leq x \leq 1$.

Se $\varphi' \in L^1([0,1])$ la formula vale anche per $x_0 = 0$ e risulta $\varphi \in AC([0,1])$.

Abbiamo

$$\|\varphi'\|_{L^1([0,1];\mathcal{L}^1)} = \int_{[0,1]} \left| \int_{[0,1]} \frac{-1}{(x+y)^2} \, d\mu(y) \right| dx =$$

Fubini - Tonelli

$$= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{x=0}^{x=1} d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \frac{1}{y(y+1)} \, d\mu(y)$$

$$\leq \int_{[0,1]} \frac{1}{y} \, d\mu(y) \underset{\text{per } \alpha > 1}{<} \infty$$ come dimostrato sopra.

$\square$