Analisi Reale

Scritto del 13 Luglio 2015

Esercizio 1 (10 punti) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0,\, xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ munito della misura di Lebesgue e sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = y^2 \mathrm{e}^{-y/x}$.

i) Determinare tutti i $p \in [1,\infty)$ tali che $f \in L^p(A)$.

ii) Stabilire se $f \in L^\infty(A)$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$ e sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{[0,x]} (1+t^2)\,d\mu(t), \qquad x \in [0,1].$$

i) Provare che φ è continua su $[0,1]$ se e solo se $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

ii) Provare che se $\varphi \in C^1([0,1])$ allora la misura μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1$.

Esercizio 3 (10 punti) Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ due funzioni misurabili, positive e limitate.

i) Provare che

$$\Big(\int_{[0,1]} f\, g\, dx\Big)^3 \le \Big(\int_{[0,1]} f^2\, g\, dx\Big)\Big(\int_{[0,1]} f\, g^2\, dx\Big). \tag{$*$}$$

ii) Calcolare tutte le funzioni f e g (misurabili, positive e limitate) tali che la disuguaglianza $(*)$ sia un'uguaglianza.

Sugg. i) $fg = (f^{\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{3}})(f^{\frac{1}{3}} g^{\frac{2}{3}})$, poi Hölder e poi di nuovo ...

3 ore a disposizione

Esercizio Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0, xy<1\}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 e^{-y/x}$.

Determinare tutti i $p \in [1,\infty)$ tali che $f \in L^p(A)$.

(i) Determinare tutti i $p \in [1,\infty)$ tali che $f \in L^p(A)$.

(ii) Stabilire se $f \in L^\infty(A)$.

Soluzione (i) Usiamo nel seguito Fubini-Tonelli:

$$\|f\|^p_{L^p(A)} = \int_A |f(x,y)|^p dx\,dy = \int_A y^{2p} e^{-py/x} dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^{1/x} y^{2p} e^{-py/x} dy \right) dx \qquad \begin{array}{l} y = xt \\ dy = x\,dt \end{array}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^{1/x^2} x^{2p} t^{2p} e^{-pt} x\,dt \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{[0,1/x^2]}(t)\, x^{2p+1} t^{2p} e^{-pt} dt \right) dx$$

$$\overset{FT}{=} \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \left(\int_0^\infty \chi_{[0,1/x^2]}(t)\, x^{2p+1} dx \right) dt$$

$$= \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \left(\int_0^{1/\sqrt{t}} x^{2p+1} dx \right) dt$$

$$= \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \left[\frac{x^{2p+2}}{2p+2} \right]_{x=0}^{x=1/\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{1}{2(p+1)} \int_0^\infty t^{2p} e^{-pt} \frac{1}{t^{p+1}} dt$$

$$= \frac{1}{2(p+1)} \int_0^\infty t^{p-1} e^{-pt}\, dt \qquad t = \frac{1}{p} s$$

$$= \frac{1}{2(p+1)} \frac{1}{p^{p-1}} \frac{1}{p} \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s}\, ds$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{2(p+1)\, p^p} < \infty \quad \text{per ogni } p \in [1, \infty)$$

Γ = Funzione Γ di Eulero.

Dunque
$$\|f\|_p = \frac{1}{p} \sqrt[p]{\frac{\Gamma(p)}{2(p+1)}}$$

(ii) Usando il fatto che $\Gamma(p) \sim \left(\frac{p}{e}\right)^p$ si calcola

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \frac{1}{e}.$$

Alternativamente, per $t > 0$ si consideri

$$\phi_t(x) = f(x, tx) = t^2 x^2 e^{-t}$$

con x soggetto alla limitazione $x \cdot (tx) < 1 \iff x^2 < \frac{1}{t}$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora

$$\frac{1-\varepsilon}{t} < x^2 < \frac{1}{t} \implies (1-\varepsilon)\, t e^{-t} < \phi_t(x) < t e^{-t}$$

La funzione $t \to t e^{-t}$ ha massimo per $t = 1$, con valore massimo $\frac{1}{e}$. Deduciamo che $f(x,y) < \frac{1}{e}$ per ogni $(x,y) \in A$ e che esistono punti $(x,y) \in A$ tali che $f(x,y) > \frac{1-\varepsilon}{e}$, comunque fissato $\varepsilon > 0$.

Dunque $\|f\|_{L^\infty(A)} = 1/e$.

$\square$

Esercizio proposto dal Prof. G. De Marco.

<u>Esercizio</u> Sia μ una misura di Borel finita su $[0,1]$ e sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \int_{[0,x]} (1+t^2)\, d\mu , \qquad x \in [0,1]$$

(i) Provare che φ è continua su $[0,1]$ $\iff$ $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

(ii) Provare che $\varphi \in C^1([0,1]) \implies \mu \ll \mathcal{L}^1$.

Soluzione. Dato $x_0 \in [0,1]$ osserviamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0^+} \int_{[0,1]} \chi_{[0,x]}(t)\,(1+t^2)\, d\mu$$

$$\overset{CD}{=} \cancel{\lim} \int_{[0,1]} \lim_{x \to x_0^+} \chi_{[0,x]}(t)\,(1+t^2)\, d\mu$$

$$= \int_{[0,x_0]} (1+t^2)\, d\mu = \varphi(x_0).$$

(i) Se φ è continua in x_0 allora

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\varphi(x_0+\delta) - \varphi(x_0-\delta) < \varepsilon$.

~~per~~

Dunque

$$\mu(\{x_0\}) \le \cancel{\mu((x_0-\delta, x_0+\delta])} \overset{\text{perché } 1+t^2 \ge 1}{\le} \int_{(x_0-\delta,\, x_0+\delta]} (1+t^2)\, d\mu =$$

$$= \varphi(x_0+\delta) - \varphi(x_0-\delta) < \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Viceversa, se $\mu(\{x_0\}) = 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0^-} \int_{[0,1]} \chi_{[0,x]}(t) \, (1+t^2) \, d\mu$$

$$\overset{CD}{=} \int_{[0,1]} \lim_{x \to x_0^-} \chi_{[0,x]}(t) \, (1+t^2) \, d\mu$$

$$= \int_{[0,1]} \chi_{[0,x_0)}(t) \, (1+t^2) \, d\mu$$

$$\overset{\mu(\{x_0\})=0}{=} \int_{[0,1]} \chi_{[0,x_0]}(t) \, (1+t^2) \, d\mu = \varphi(x_0).$$

(ii) Sia ν la misura di Borel $\nu(B) = \int_B (1+t^2) \, d\mu$
$B \subset [0,1]$ di Borel. Chiaramente:

$$\nu(B) = 0 \implies \mu(B) = 0$$

Basta dunque provare che $\nu \ll \mathcal{L}^1$.
Sia $E \subset [0,1]$ con $\mathcal{L}^1(E) = 0$. Allora
$\forall \varepsilon > 0$ esistono intervalli $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ con $\alpha_i < \beta_i$
tali che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon.$$

Allora

$$\nu(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)}{\beta_i - \alpha_i} (\beta_i - \alpha_i) \overset{\text{Lagrange}}{\le} \|\varphi'\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i - \alpha_i$$

$$\le \|\varphi'\|_\infty \cdot \varepsilon$$

Deduciamo che $\nu(E) = 0$. $\square$

<u>Esercizio</u> Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ misurabili positive limitate.

(i) Provare che

$$\left(\int_{[0,1]} f g \, dx\right)^3 \le \left(\int_{[0,1]} f^2 g \, dx\right)\left(\int_{[0,1]} f g^2 \, dx\right)$$

(ii) Calcolare tutte le funzioni f, g per cui vale l'uguaglianza.

Soluzione. Possiamo scomporre

$$f g = \left(f^{\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{3}}\right)\left(f^{\frac{1}{3}} g^{\frac{2}{3}}\right)$$

Facciamo una disuguaglianza di Hölder con esponenti $p = 3$ e $q = 3/2$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\left(\int_{[0,1]} f g \, dx\right)^3 \le \left(\int_{[0,1]} f^2 g \, dx\right)\left(\int_{[0,1]} f^{\frac{1}{2}} g \, dx\right)^2$$

Qui si ha uguaglianza se e solo se esiste una costante $\lambda \in (0, \infty)$ tale che (quasi ovunque)

$$\left(f^{2/3} g^{1/3}\right)^{3-1} = \lambda f^{1/3} g^{2/3} \iff f = \lambda$$

Di nuovo con una disuguaglianza di Hölder

$$\left(\int_{[0,1]} f^{1/2} g \, dx\right)^2 = \left(\int_{[0,1]} 1 \cdot f^{1/2} g \, dx\right)^2 \le \underbrace{\left(\int_{[0,1]} 1^2 dx\right)}_{=\,1} \cdot \left(\int_{[0,1]} f g^2 dx\right)$$

Qui si ha uguaglianza se e solo se esiste una costante $\mu \in (0,\infty)$ tale che

$$f^{1/2} g = \mu \quad \text{quasi ovunque}.$$

Dunque, mettendo insieme le due disuguaglianze si trova

$$\left(\int_{[0,1]} f g \, dx\right)^3 \leq \left(\int_{[0,1]} f^2 g \, dx\right) \cdot \left(\int_{[0,1]} f g^2 \, dx\right)$$

Si ha uguaglianza se e solo se

$$\begin{cases} f = x \\ f^{1/2} g = \mu \end{cases} \quad \text{q.o.}$$

Da cui si ottiene $f =$ costante e $g =$ costante.

Analisi Reale

Scritto del 15 Settembre 2015

Esercizio 1 (10 punti) Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che per ogni $x > 0$ si abbia
$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$
Calcolare tutti i valori di $\alpha > 0$ tali che la serie di funzioni
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{kf(x+k)}{\log^2 k}, \quad 0 < x < 1,$$
converga in $L^1(0,1)$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ tale che per ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, dove $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, si abbia $\mu([\alpha, \beta]) \leq (\beta - \alpha)^2$. Provare che μ è la misura nulla.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $f \in L^\infty([0,1])$ una funzione positiva su $[0,1]$. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \log \Big(\int_{[0,1]} \sinh(pf(x))dx \Big).$$

3 ore a disposizione

Esercizio 1 Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per ogni } x>0.$$

Calcolare tutti i valori di α tali che la serie di funzioni

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k}, \quad 0<x<1,$$

converga in $L^1(0,1)$.

Soluzioni. Le somme parziali $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k}$ sono in $L^1(0,1)$.
La serie converge in $L^1(0,1)$ se e solo se

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_{L^1(0,1)} = 0.$$

Per la disuguaglianza di Minkowski

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_1 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \int_{[0,1]} |f(x+k)|\, dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \int_{[0,1]} \frac{1}{(x+k)^\alpha}\, dx = [\alpha \neq 1] =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{(x+k)^{\alpha-1}} \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \frac{1}{\alpha-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{(k+1)^{\alpha-1} k^{\alpha-1}} = \circledast$$

Quando $\alpha = 1$ si arriva alla stima

$$\Big\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \Big\|_1 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{k}{\log^2 k} \left(\log (k+1) - \log k \right)$$

Siccome $\log (k+1) - \log k = \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$

e siccome $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 k} = \infty$, quando $\alpha = 1$ NON si conclude. Anzi, scegliendo proprio $f(x) = \frac{1}{x}$ si vede per convergenza monotona che le diseguaglianze $\leq$ sono uguaglianze e quindi

$$\Big\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k f(x+k)}{\log^2 k} \Big\|_{L^1(0,1)}^{\alpha=1,\ f(x)=1/x} = \infty .$$

Torniamo al caso $\alpha \neq 1$. Siccome

$$\frac{k}{\log^2 k} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{(k+1)^{\alpha-1} k^{\alpha-1}} = \frac{k}{\log^2 k} \frac{k^{\alpha-1} \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1} - 1 \right]}{k^{2\alpha-2} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1}} =$$

$$= \frac{k}{\log^2 k} \frac{k^{\alpha-1} \cdot \left[(\alpha-1)\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right]}{k^{2\alpha-2} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1}} = \frac{(\alpha-1)\,(1+o(1))}{k^{\alpha-1} \log^2 k}$$

Si vede che

$$\circledast = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1+o(1)}{k^{\alpha-1}\log^2 k} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \iff \alpha-1 \geq 1$$

(Criterio Cauchy)

Deduciamo che

$$\alpha \geq 2 \implies \text{Serie Converge in } L^1(0,1).$$

Se $\alpha < 2$, scegliendo $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ le disuguaglianze $\leq$ sono uguaglianze.

Si deduce che

$$\alpha < 2 \implies \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\, f(x+k)}{\log^2 k} \right\|_{L^1(0,1)} = \infty .$$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

$\square$

Esercizio 2 Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ tale che

$$\mu([\alpha,\beta]) \le (\beta-\alpha)^2$$

per ogni intervallo $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.
Provare che $\mu = 0$.

Dim. Proviamo che $\mu([0,1]) = 0$. Dato $n \in \mathbb{N}$:

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mu([0,1]) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)^{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

per $n \to \infty$ si deduce che $\mu([0,1]) = 0$.
In modo analogo si prova che $\mu([k,k+1]) = 0$
per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e quindi

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k,k+1]\right) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu([k,k+1]) = 0$$

Segue che $\mu = 0$.

$\square$

Esercizio 3 Sia $f \in L^\infty(0,1)$ una funzione positiva, $f>0$.
Calcolare il limite

$$L = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \log\left(\int_{[0,1]} \sinh(p\, f(x))\, dx \right).$$

Soluzione. Chiaramente

$$\int_{[0,1]} \sinh(p\, f(x))\, dx \overset{\sinh \uparrow}{\leq} \sinh(p\|f\|_\infty) = \frac{e^{p\|f\|_\infty} - e^{-p\|f\|_\infty}}{2}$$

Inoltre

$$\frac{1}{p} \log\left(\frac{e^{p\|f\|_\infty} - e^{-p\|f\|_\infty}}{2} \right) \leq \log\left(\frac{e^{p\|f\|_\infty}}{2} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \log \frac{e^{\|f\|_\infty}}{2^{1/p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty .$$

Dunque si ha certamente

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{p} \log\left(\int_{[0,1]} \sinh(p\, f(x))\, dx \right) \leq \|f\|_\infty .$$

Cerchiamo di provare che

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{1}{p} \log\left(\int_{[0,1]} \sinh(p\, f(x))\, dx \right) \overset{?}{\geq} \|f\|_\infty$$

Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$A_\varepsilon = \{ x \in [0,1] \, ; \, f(x) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \}$$

ha misura positiva, $\mathcal{L}^1(A_\varepsilon) > 0$. Inoltre

$$\int_{[0,1]} \sinh(p f(x)) dx \geq \int_{A_\varepsilon} \sinh(p f(x)) dx \geq$$

$$\geq \sinh(p(\|f\|_\infty - \varepsilon)) \, \mathcal{L}^1(A_\varepsilon)$$

e quindi

$$\frac{1}{p} \log \left(\int_{[0,1]} \sinh(p f(x)) dx \right) \geq \log \left(\sinh(p(\|f\|_\infty - \varepsilon)) \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \underbrace{\log \mathcal{L}^1(A_\varepsilon)^{1/p}}_{\to 0 \quad p \to \infty}$$

In modo analogo a sopra si trova

$$\lim_{p \to \infty} \left(\sinh(p(\|f\|_\infty - \varepsilon)) \right)^{\frac{1}{p}} = e^{\|f\|_\infty - \varepsilon}$$

e quindi

$$\liminf_{p \to \infty} \frac{1}{p} \log \left(\int_{[0,1]} \sinh(p f(x)) dx \right) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. La tesi segue.

$\square$