ESERCIZIO Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su X. Provare che l'insieme

$$E = \{ x \in X : \text{il limite } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ esiste finito} \}$$

è misurabile.

Soluzione. Le funzioni $F^-, F^+ : X \to [-\infty, \infty]$

$$F^-(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$F^+(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

sono misurabili. Quindi gli insiemi

$$A^- = \{x \in X : F^-(x) > -\infty\}$$

$$A^+ = \{x \in X : F^+(x) < \infty\}$$

sono misurabili. Anche $F^+ - F^-$ è misurabile e ben definita su $A^- \cap A^+$. L'insieme

$$A^= = \{ x \in X : F^+(x) - F^-(x) = 0 \}$$

è misurabile. Quindi

$$E = A^- \cap A^+ \cap A^=$$

è misurabile.

$\square$

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua q.o. per la misura $\mathcal{L}^1$. Provare che f è $\mathcal{L}^1$-misurabile.

Soluzione. Esiste $N \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{L}^1(N) = 0$ ed $f: \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{R}$ è continua. Questo significa che $\forall A \subset \mathbb{R}$ aperto, l'antimmagine

$$f^{-1}(A) \text{ è aperto relativamente a } \mathbb{R} \setminus N$$

Ovvero: Esiste $B \subset \mathbb{R}$ aperto tale che

$$f^{-1}(A) \cap (\mathbb{R} \setminus N) = \underbrace{B \cap (\mathbb{R} \setminus N)}_{\substack{\text{aperto di } \mathbb{R}\setminus N \\ \text{nella topologia} \\ \text{restrizione}}}$$

Dunque:

$$f^{-1}(A) = \underbrace{\left(f^{-1}(A) \cap N\right)}_{\substack{\mathcal{L}^1\text{-mis perché} \\ \text{ha misura nulla}}} \cup \underbrace{\left(f^{-1}(A) \cap (\mathbb{R} \setminus N)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \underbrace{\underset{\text{mis.}}{B} \cap \underset{\text{mis}}{(\mathbb{R}\setminus N)}}_{\text{mis}}}}$$

e quindi $f^{-1}(A)$ è $\mathcal{L}^1$-misurabile.

$\square$

ESERCIZIO Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una "funzione semplice numerabile" non negativa:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{A_i}(x)$$

con $c_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{A}$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ disgiunta.

Provare - senza usare il Teorema della convergenza monotona - che si ha

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(A_i).$$

Soluzione. La funzione $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)$ è semplice e $\varphi_n \leq \varphi$. Dunque

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot c_i \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e passando al limite

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu \geq \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(A_i).$$

Per provare la disuguaglianza opposta procediamo nel seguente modo.

Sia $\psi \leq \varphi$ una funzione semplice ovvero

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}(x)$$

con $B_j \in \mathcal{A}$ e $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = X$ disgiunta.

Siccome $\psi \leq \varphi$ si deduce che:

$$\circledast \qquad A_i \cap B_j \neq \emptyset \implies d_j \leq c_i .$$

Conti:

$$\int_X \psi(x)\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} d_j \, \mu(B_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d_j \, \mu\Big(B_j \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\text{disg}}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i)$$

$$\overset{\text{lecito}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} d_j \, \mu(B_j \cap A_i)$$

$$\overset{\circledast}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} c_i \, \mu(B_j \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \, \mu\Big(A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \, \mu(A_i)$$

Deduciamo che

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu = \sup_{\substack{\psi \leq \varphi \\ \text{semplice}}} \int_X \psi \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(A_i).$$

$\square$

Esercizio Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ una funzione $\mathcal{L}^1$-misurabile non negativa, $f \geq 0$ su $\mathbb{R}$, tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$$

Provare che $f(x) = 0$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Fissato $\varepsilon > 0$ sia

$$A_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \varepsilon \}$$

È $\mathcal{L}^1$-misurabile. Inoltre

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \overset{\text{monotonia}}{\geq} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \chi_{A_\varepsilon}(x)\,dx \geq \varepsilon\, \mathcal{L}^1(A_\varepsilon)$$

deduciamo che $\mathcal{L}^1(A_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Di conseguenza:

$$\{ x \in \mathbb{R} : f(x) > 0 \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}^1(\{ x \in \mathbb{R} : f(x) > 0 \}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_{1/n}) = 0$$

ovvero $f(x) = 0$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in \mathbb{R}$,

$\square$

__Esercizio__ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

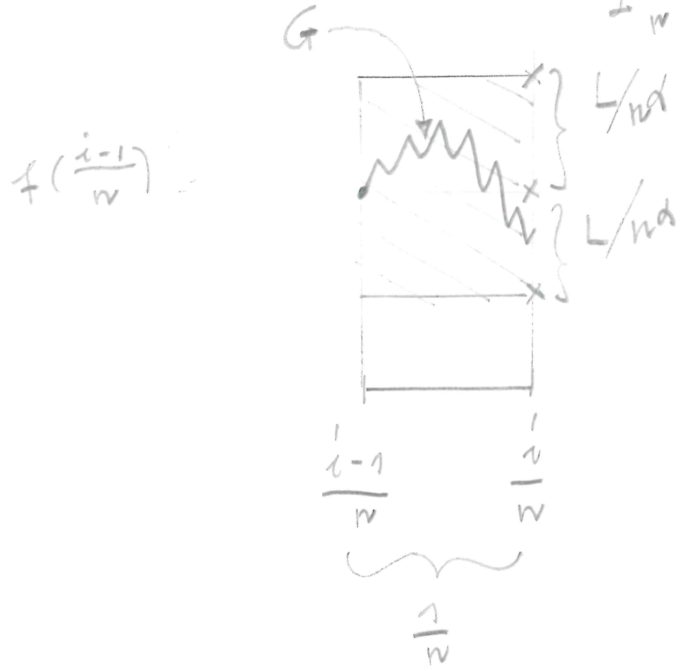
$$|f(x) - f(y)| \leq L\, |x-y|^\alpha \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

dove $L \geq 0$ ed $\alpha \in (0,1]$ sono due costanti.
Detto $G = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in \mathbb{R} \}$, è vero che $\mathcal{L}^2(G) = 0$?

Soluzione. Per chiarezza supponiamo che $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Suddividiamo

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]}_{= I_n^i}, \qquad n \in \mathbb{N}$$



se $x \in I_n^i$

$$\left| f(x) - f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right| \leq L \frac{1}{n^\alpha}$$

Sia R_n^i il rettangolo in figura. Allora

$$\mathcal{L}^2(R_n^i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2L}{n^\alpha} = \frac{2L}{n^{1+\alpha}}$$

Inoltre

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_n^i \implies \mathcal{L}^2(G) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^2(R_n^i) =$$

$$= n \cdot \frac{2L}{n^{1+\alpha}} = \frac{2L}{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha > 0$$

Dunque $\mathcal{L}^2(G) = 0$.

ESERCIZIO Sia $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ una funzione integrabile. Provare che esiste $x \in [0,1]$ tale che

$$f(x) \leq \int_{[0,1]} f(y)\,dy.$$

Soluzione.
Per assurdo sia

$$f(x) > \int_{[0,1]} f(y)\,dy \qquad \forall x \in [0,1].$$

Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si considerino gli insiemi

$$A_n = \left\{ x \in [0,1] : f(x) > \frac{1}{n} + \int_{[0,1]} f(y)\,dy \right\}$$

Sono $\mathcal{L}^1$-misurabili e inoltre

$$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Di conseguenza esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{L}^1(A_n) > 0$. Altrimenti sarebbe $\mathcal{L}^1([0,1]) = 0$, che è falso.

Ora

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \int_{A_n} f(x)\,dx + \int_{[0,1]\setminus A_n} f(x)\,dx \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{n} + \int_{[0,1]} f(y)\,dy \right) \mathcal{L}^1(A_n) +$$

$$+ \int_{[0,1]} f(y)\,dy \cdot \mathcal{L}^1([0,1]\setminus A_n)$$

$$> \int_{[0,1]} f(y)\,dy \left(\mathcal{L}^1(A_n) + \mathcal{L}^1([0,1]\setminus A_n) \right) =$$

$$= \int_{[0,1]} f(y)\,dy.$$

ASSURDO $\square$

ESERCIZIO Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$$

Soluzione. Si ha

$$\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx = \int_0^\infty \chi_{(0,n)}(x) \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx.$$

1° Modo: con la convergenza monotona:

$$n \longmapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{è crescente} \quad (\text{noto})$$

e

$$n \longmapsto \chi_{(0,n)}(x) \quad \text{è crescente},$$

Inoltre

$$\lim_{n \to \infty} \chi_{(0,n)}(x) \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Quindi

$$L = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} \chi_{(0,n)}(x) \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$$

2° Modo: Convergenza dominata:

$$0 \leq \chi_{(0,n)}(x) \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq 1 \cdot e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x} \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

Maggiorante.

E si conclude come sopra.

ESERCIZIO Sia $f : [0,1] \to [0,\infty]$ una funzione misurabile non negativa. Supponiamo che esista $\alpha \in [0,1)$ tale che

$$\int_{[0,1]} f(x)^n = \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Provare che esiste $E \subset [0,1]$ misurabile tale che $f(x) = \chi_E(x)$, $x \in [0,1]$.

Soluzione. Dato $\varepsilon > 0$ sia

$$A_\varepsilon = \{x \in [0,1] ; f(x) > 1+\varepsilon\}$$

Allora

$$\alpha = \int_{[0,1]} f(x)^n dx \geq \int_{A_\varepsilon} f(x)^n dx \geq (1+\varepsilon)^n \mathcal{L}^1(A_\varepsilon)$$

ovvero

$$\mathcal{L}^1(A_\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

Con $n \to \infty$ deduco che $\mathcal{L}^1(A_\varepsilon) = 0$ e dunque $f \leq 1$ q.o. su $[0,1]$.

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} f(x)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) = 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq f(x) < 1 \end{cases}$$

Inoltre $0 \leq f(x)^n \leq 1 \in L^1([0,1])$ e siamo nelle ipotesi del teorema della convergenza dominata. Oppure anche:

$f_n(x) = 1 - f(x)^n$ è crescente con $f_n \geq 0$.

Siamo nelle ipotesi del teorema del convergenza monotona. Possiamo portare il limite nell'integrale:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f(x)^n dx = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f(x)^n dx$$

$$= \int_{[0,1]} \chi_E(x) dx = \mathcal{L}^1(E)$$

dove $E = \{x \in [0,1] : f(x) = 1\}$.

In definitiva:

$$0 = \int_{[0,1]} f(x)^n dx - \int_{[0,1]} \chi_E(x) dx$$

$$= \int_{[0,1]} \underbrace{\left(f(x)^n - \chi_E(x)\right)}_{\geq 0 \text{ q.o.}} dx$$

Deduciamo che $f(x)^n = \chi_E(x)$ q.o.

ovvero $f(x) = \chi_E(x)$ q.o.

Esercizio Sia (X,μ) uno spazio di misura e sia $f \in L^1(X)$.

Calcolare il

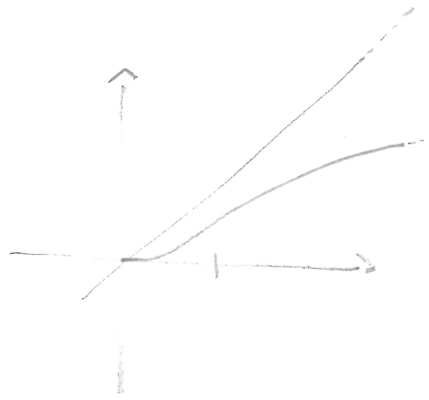
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n \log\left(1+\left(\frac{|f|}{n}\right)^2\right) d\mu .$$

Esamino

$$\left(1+\frac{|f|^2}{n^2}\right)^n = \left[\underbrace{\left(1+\frac{|f|^2}{n^2}\right)^{n^2}}_{\to\, e^{|f|^2}}\right]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \qquad (q.o.)$$

Dunque se posso passare con il limite nell'integrale posso dire che il risultato è $=0$.

Studio $\varphi(x) = \log(1+x^2)$. Guardo se



(*) $$\log(1+x^2) \le x \quad \text{per } x \ge 0 .$$

Definisco $\Phi(x) = x - \log(1+x^2)$. Ho

$$\Phi(0) = 0 .$$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \ge 0 \quad \forall x \ge 0 .$$

Dunque il minimo di Φ su $[0,+\infty)$ è in $x=0$.

Questo prova la (*). Dunque

$$\left| n \log\left(1+\frac{|f|^2}{n^2}\right)\right| \le n \frac{|f|}{n} = |f| \in L^1(X) .$$

Posso usare la convergenza dominata.