ESERCIZIO Siano $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, tali che $f_k \geq 0$ ed $f \geq 0$ q.o. su $\mathbb{R}$. Supponiamo che:

(i) $\liminf_{k \to \infty} f_k(x) \geq f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\limsup_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

Provare che:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|\,dx = 0.$$

Soluzione. Imitiamo la prova del teorema della convergenza dominata. Sia

$$g_k(x) = f_k(x) + f(x) - |f_k(x) - f(x)|.$$

Dalla dis. triangolare: $g_k(x) \geq 0$ q.o. su $\mathbb{R}$.
Possiamo usare il Lemma di Fatou:

$$\circledast \quad \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k \to \infty} g_k(x)\,dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x)\,dx.$$

Osserviamo che:

$$g_k(x) = f_k(x) + f(x) - |f_k(x) - f(x)| =$$

$$= \begin{cases} 2f(x) & \text{se } f_k(x) \geq f(x) \\ 2f_k(x) & \text{se } f(x) \geq f_k(x) \end{cases}$$

Dunque, si ha

$$g_k(x) \geq 2 \min\{f(x), f_k(x)\}$$

e quindi

$$\liminf_{k\to\infty} g_k(x) \geq 2 \liminf_{k\to\infty} \cancel{\{f(x)} \min\{f(x), f_k(x)\} =$$

$$= 2 \min\{f(x), \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\} \geq$$

$$\overset{(i)}{\geq} 2 \min\{f(x), f(x)\} = 2 f(x).$$

Integrando si trova

$$(\Delta) \qquad 2 \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} g_k(x)\,dx.$$

Ripartiamo dal membro di destra in ($*$):

$$(**) \qquad \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x)\,dx = \liminf_{k\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|\,dx \right).$$

Per calcolare questo liminf osserviamo questo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \overset{(i)}{\leq} \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx \leq$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx \overset{(ii)}{\leq} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx .$$

Deduciamo che abbiamo tutte uguaglianze e in particolare che esiste il limite

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx .$$

Ripartendo dalla (✱✱) concludiamo che

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x)\,dx = 2\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx +$$

(□)

$$+ \liminf_{k\to\infty} -\int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|\,dx$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|\,dx$$

Mettendo insieme ✱, (△) e (□) si trova

$$\limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|\,dx \leq 0$$

e questo è la conclusione. □

ESERCIZIO $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma$-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}^n$

$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ misura tale che

1) $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$

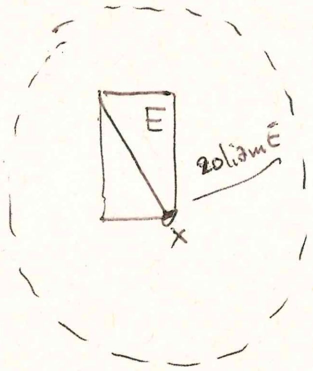
2) $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$\mathrm{diam}(E) < \delta \implies \mu(E) < \varepsilon$$

per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Soluzione. É sufficiente provare l'affermazione quando $E = B$ palla di $\mathbb{R}^n$ infatti $\forall E \subset \mathbb{R}^n \ \exists x \in \mathbb{R}^n$ tale che $E \subset B(x, 2\mathrm{diam}(E))$



Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e prendiamo $x \in K$

$$\lim_{r \to 0^+} \mu(B(x,r)) = \mu\Big(\bigcap_{r>0} B(x,r)\Big) = \mu(\{x\}) = 0$$

Quindi $\exists \, r_x > 0$ tale che

$$\mu(B(x, r_x)) < \varepsilon$$

Chiaramente

$$K \subset \bigcup_{x \in K} \underbrace{B\Big(x, \frac{r_x}{2}\Big)}_{\text{palle aperte}}$$

Per compattezza esistono $x_1 \ldots x_N \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r_i/2) \qquad \text{con} \quad r_i = r_{x_i}$$

Sia $\delta = \min\{ r_1/4, \ldots, r_N/4 \} > 0$

Se $E \subset K$ e $\operatorname{diam}(E) < \delta$ allora esiste $i = 1, \ldots, N$ tale che $E \cap B(x_i, r_i/2) \neq \emptyset$ e $\forall x \in E$ si ha
$\Downarrow$
y Esiste

$$|x - x_i| \leq |x - y| + |y - x_i| < \delta + r_i/2 < \frac{3}{4} r_i$$

ovvero $E \subset B(x_i, r_i)$ e dunque

$$\mu(E) \leq \mu\left(B(x_i, r_i)\right) < \varepsilon .$$

Dunque l'affermazione è vera per $E \subset \overline{B(0,R)}$ con $R > 0$ che possiamo scegliere.

Ora osserviamo che

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{K=1}^{\infty} \overline{B(0,K)} = \overline{B(0,1)} \cup \bigcup_{K=2}^{\infty} \overline{B(0,K)} \setminus \overline{B(0,K-1)}$$

e dunque

$$1 = \mu\left(\overline{B(0,1)}\right) + \sum_{K=2}^{\infty} \mu\left(\overline{B(0,K)} \setminus \overline{B(0,K-1)} \right)$$

Dunque esiste $\overline{K} \in \mathbb{N}$ tale che

$$= \sum_{K=\overline{K}}^{\infty} \mu\left(\overline{B(0,K)} \setminus \overline{B(0,K-1)} \right) < \varepsilon$$

$$= \mu\left(\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| > \overline{K} - 1 \} \right)$$

Dunque se $E \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \bar{k} - 1\}$ si ha (indipendentemente dal diametro) $\mu(E) < \varepsilon$.

Mettendo insieme le due considerazioni si ottiene la soluzione. Dettagli lasciati al lettore.

□

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Provare che per q.o. $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy = f(x_0).$$

Soluzione. Per il teorema di Lebesgue q.o. $x_0 \in \mathbb{R}$ verifica:

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{I_r(x_0)} |f(y) - f(x_0)|\,dy = 0$$

dove $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Dunque

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy - f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x - x_0}\big(f(y) - f(x_0)\big)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{(x_0 - r, x_0 + r)} |f(y) - f(x_0)|\,dy \qquad \text{con } r = |x - x_0|$$

$$\leq 2 \cdot \frac{1}{2r} \int_{I_r(x_0)} |f(y) - f(x_0)|\,dy \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0$$

□

ESERCIZIO Dominio, continuità, derivabilità:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\, dt .$$

Calcolare F.

- $x \in \mathbb{R}$ fissato, esiste $c>0$ tale che $\log(1+x^2t^2) \leq \{c\,|t|^{1/2}+1\}\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2}+1}{1+t^2}\, dt < +\infty \implies F(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Fissato $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, per $|x-y| \leq \varepsilon$ si ha $\log(1+y^2t^2) \leq c\{|t|^{1/2}+1\}$ $\forall t$, Poiché

$$\frac{t^{1/2}+1}{1+t^2} \in L^1(0,+\infty)$$

dalla conv. dominata segue che

$$\lim_{y \to x} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+y^2t^2)}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\, dt = F(x).$$

Quindi $F \in C(\mathbb{R})$.

- Consideriamo

$$\varphi_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Per $0 < \varepsilon \leq x \leq M < +\infty$ si ha

$$|\varphi_x(t)| \leq C_{\varepsilon M} \frac{1}{1+t^2} \in L^1(0,\infty)$$

Quindi segue che F è derivabile per $x \neq 0$ e

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\, dt, \quad x \neq 0.$$

La funzione F è pari. Quindi, se esiste $F'(0)$ deve essere $F'(0)=0$.

Per $x \neq 0$ calcolo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\, dt = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{A}{(1+x^2t^2)} + \frac{B}{1+t^2} \right\} dt$$

$$\begin{aligned} t^2 &= A(1+t^2) + B(1+x^2t^2) \\ &= A + B + t^2(A + Bx^2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ A + Bx^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ A - Ax^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{1-x^2} \end{cases}$$

(Da precisare in seguito, $x = \pm 1$)

$t|x| = \tau$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \right\} \qquad (x>0)$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left\{ \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau \right\}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left\{ \left(\frac{1}{|x|} - 1 \right) \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-x^2} \frac{1-|x|}{|x|}$$

Dunque

$$F'(x) = \begin{cases} 2\cancel{x} \dfrac{\pi}{\cancel{2}} \dfrac{1}{1-x^2} \dfrac{1-x}{\cancel{x}} & x > 0 \\ x\pi \dfrac{1}{1-x^2} \dfrac{1+x}{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi \dfrac{1}{1+x} & x > 0 \\ -\pi \dfrac{1}{1-x} & x < 0 \end{cases}$$

Dunque F non è derivabile in $x = 0$.

Calcolo di F, so che $F(0) = 0$. Dunque per $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x F'(\xi)\, d\xi = \int_0^x \frac{\pi}{1+\xi}\, d\xi$$

$$= \pi \Big[\log(1+\xi) \Big]_0^x = \pi \log(1+x) .$$

In definitiva

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2t^2)}{1+t^2}\, dt = \pi \log(1+|x|), \qquad x \in \mathbb{R} .$$

F non è derivabile in $x=0$.

Esercizio Siano $0 < m < M < \infty$ e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $m \le f(x) \le M$ per q.o. $x \in [0,1]$. Provare che

$$\left(\int_{[0,1]} f(x)dx\right)\left(\int_{[0,1]} \frac{1}{f(x)}dx\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Determinare le funzioni per cui vale l'uguaglianza.

Soluzione. Per q.o. $x \in [0,1]$ si ha

$$(*) \qquad (f(x)-m)(f(x)-M) \le 0$$

ovvero

$$f(x)^2 - f(x)(m+M) + mM \le 0$$

ovvero

$$f(x) + \frac{mM}{f(x)} \le m+M.$$

Integrando su $[0,1]$ si trova

$$\int_{[0,1]} f(x)dx + mM\int_{[0,1]} \frac{1}{f(x)}dx \le m+M.$$

Usiamo la disuguaglianza fra media geometrica ed aritmetica

$$(**) \qquad \sqrt{st} \le \frac{s+t}{2} \qquad \text{per } s,t \ge 0$$

con la scelta

$$s = \int_{[0,1]} f(x)dx \quad \text{e} \quad t = mM\int_{[0,1]} \frac{1}{f(x)}dx.$$

Si trova

$$\sqrt{mM \cdot \int_{[0,1]} f(x)\,dx \cdot \int_{[0,1]} \frac{1}{f(x)}\,dx} \leq \frac{1}{2}\int_{[0,1]} f(x)\,dx + \frac{mM}{2}\int_{[0,1]} \frac{1}{f(x)}\,dx$$

$$\leq \frac{m+M}{2}$$

da cui si ottiene

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx \cdot \int_{[0,1]} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Se in tale disuguaglianza vale l'uguale, allora

c'è "=" in ⊛ ed in ⊛⊛.

c'è "=" in ⊛ se e solo se

($\square$) $\qquad f(x) \in \{m, M\}$ per q.o. $x \in [0,1]$.

c'è "=" in ⊛⊛ se e solo se $s = t$, ovvero

(Δ) $$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = mM \int_{[0,1]} \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

La ($\square$) significa che

$$f(x) = m\,\chi_A(x) + M\,\chi_{[0,1]\setminus A}(x)$$

per un insieme $A \subset [0,1]$ misurabile.

Mettendolo in (A) si trova:

$$m\, \mathcal{L}^1(A) + M\,(1 - \mathcal{L}^1(A)) =$$

$$= m M \left[\frac{1}{m}\, \mathcal{L}^1(A) + \frac{1}{M}\, (1 - \mathcal{L}^1(A)) \right]$$

ovvero

$$\mathcal{L}^1(A)\; 2\,(m - M) = m - M$$

ovvero $\qquad \mathcal{L}^1(A) = \frac{1}{2}.$

$\square$

Soluzione suggerita da Giulio P.

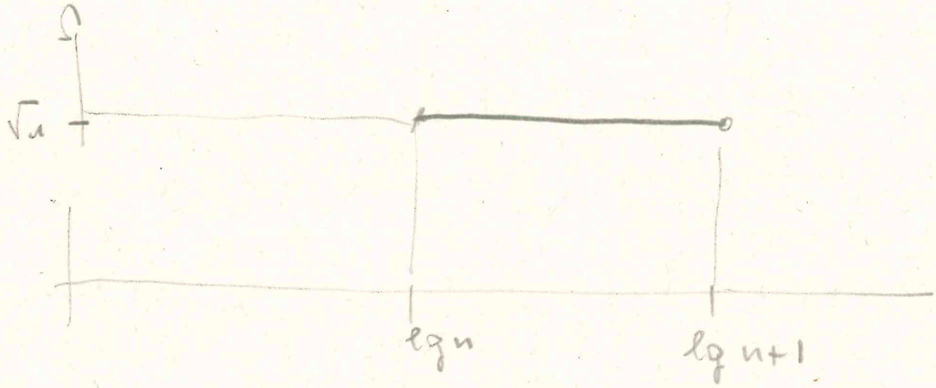
ESERCIZIO χ_n = caratteristica di $[\lg n, \lg n+1]$

$\varphi_n = \sqrt{n}\ \chi_n$

(1) Per quali $1 \leq p < \infty$ ho conv. forte $L^p(0,\infty)$?

(2) " " " " " debole $L^p(0,\infty)$?

Soluzione



(1)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0 \qquad \forall x > 0$$

Dunque

$$\varphi_n \xrightarrow{L^p \text{ forte}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{q.o.}$$

Esaminiamo

$$\int_0^\infty |\varphi_n|^p \, dx = \int_{\log n}^{\lg n+1} n^{p/2} \, dx = n^{p/2} (\lg(n+1) - \lg n)$$

$$= n^{p/2} \lg \frac{n+1}{n} = n^{p/2} \lg \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= n^{p/2} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{p/2-1} \underset{n\to\infty}{(1 + o(1))}$$

Dunque

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} 0 \iff \frac{p}{2} - 1 < 0$$

$$\iff \frac{p}{2} < 1$$

$$\iff p < 2.$$

(2) Sappiamo:

Conv. forte $\Rightarrow$ Conv. debole

Dunque per $1 \leq p < 2$; $\quad \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p\text{-debole}} 0$

Potrebbero esserci altri p.

Consideriamo $p \geq 2$ e sia $1 < q \leq 2$ coniugato

Prendiamo $g \in L^q(0,\infty)$

$$\left|\int_0^\infty \varphi_n(x) g(x)\,dx\right| \leq \int_{\log n}^{\log n+1} \sqrt{n}\,|g(x)|\,dx$$

$$\leq \left(\int_{\log n}^{\log(n+1)} n^{\frac{p}{2}}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\log n}^{\log n+1} |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(n^{\frac{p}{2}-1}(1+o(1))\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\log n}^{\log n+1} |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{p=2}{=} \sqrt{1+o(1)} \left(\int_{\log n}^{\log n+1} |g|^2\,dx\right)^{1/2}$$

dove $g \in L^2(0,\infty)$. Ma allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\log n}^{\log n+1} |g|^2\,dx \overset{CD}{=} 0$$

ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi_n(x)\, g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in L^2(0,\infty)$$

ovvero $\quad \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2\text{-debole}} 0$

Rimane da considerare il caso $p > 2$ e quindi $q < 2$.

In questo caso

$$\int_0^\infty |\varphi_n|^p \, dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Questo lascia supporre che non ci sia conv. debole. Cerco $g \in L^q(0,\infty)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi_n(x) \, g(x) \, dx \quad \text{NON esiste finito}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ad es:} \\ \limsup_{n\to\infty} \end{array} \qquad = +\infty \right)$$

Per "ottimizzare" i conti vorrei avere

$$g = n^\alpha \quad \text{su } [\ell_n, \ell_{n+1}]$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ da discutere

$$\int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \sqrt{n} \, n^\alpha \, dx = n^{\frac{1}{2}+\alpha-1} (1+o(1))$$

Diverge se $\alpha - \frac{1}{2} > 0 \iff \boxed{\alpha > \frac{1}{2}}$ $\circledast$

Non posso farlo su tutti gli intervalli ($\Rightarrow g \notin L^q$).

Però

$$\int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} |n^\alpha|^q = \boxed{\begin{array}{l} n^{\alpha q - 1} \quad (1+o(1)) \\ \quad\quad \downarrow \quad \text{per } \alpha q - 1 < 0 \\ \quad\quad 0 \end{array}}$$

$$\alpha q - 1 < 0 \iff \alpha q < 1 \iff \boxed{\alpha < 1/q} \qquad (**)$$

Sono compatibili (*) e (**)?

$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{q} \implies q < 2$$ È il nostro caso

Quindi posso scegliere questo α.

ORA: Esiste successione $n_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$\int_{\lg n_k}^{\lg(n_k+1)} |n_k^\alpha|^q \, dx \leq \frac{1}{2^k}$$

Definisco $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ così

$$f(x) = \begin{cases} n_k^\alpha & \text{se } x \in [\lg n_k, \lg(n_k+1)] \text{ per qualche } k \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

ORA:

$$\int_0^\infty |f|^q \, dx \leq 1$$

E

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi_n(x)\, f(x)\, dx = +\infty .$$