Esercizio Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione con supporto compatto tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0$$

Provare che $f = 0$ q.o.

Soluzione. Se fosse $f \in C^1_c(\mathbb{R})$ ragionerei così:

Per il Teorema di Lagrange:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = |f'(\xi(h))| \leq \max_{\mathbb{R}} |f'| < \infty$$

Siccome l'integrazione avviene su un compatto si può portare la "derivata" nell'integrale

$$0 = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\, dx$$

Si deduce che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e dunque $f =$ costante. Siccome f ha supporto compatto deve essere $f = 0$.

Per ricondursi a questo caso ($f \in C^1_c(\mathbb{R})$), regolarizziamo

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy, \quad \varepsilon > 0,$$

dove $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è un nucleo di regolarizzazione.

Allora:

(1) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$

(2) f_ε ha supporto compatto, perché f lo ha.

Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)|\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x+h-y)\, f(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy \right| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, f(y+h)\, dy - \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x-y)\, |f(y+h) - f(y)|\, dy\, dx$$

Fubini-Tonelli

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y+h) - f(y)|\, dy$$

Per confronto segue che

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)}{h} \right| dx = 0$$

Deduciamo che $f_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall \varepsilon > 0$.

Siccome poi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon - f\|_1 = 0$$

deduciamo che $\|f\|_1 = 0$ e quindi $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R}$ una funzione 1-periodica localmente integrabile e sia $\phi \in C([0,1])$ una funzione continua. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\phi(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 \phi(x)\,dx$$

Soluzione. Cambio di variabile $nx = y$

$$\int_0^1 f(nx)\phi(x)\,dx = \int_0^n f(y)\,\phi\left(\frac{y}{n}\right)\frac{dy}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{i-1}^{i} f(y)\,\phi\left(\frac{y}{n}\right)dy \qquad y = i-1+z$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f(i-1+z)\,\phi\left(\frac{i-1+z}{n}\right)dz$$

f è 1-periodica

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f(z)\,\phi\left(\frac{i-1+z}{n}\right)dz$$

ϕ è uniformemente continua in $[0,1]$ e quindi dato $\varepsilon>0$ si ha

$$\left|\phi\left(\frac{i-1+z}{n}\right) - \phi\left(\frac{i-1}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$$

per ogni n sufficientemente grande e $\forall i\ \forall z \in [0,1]$

Dunque
$$\int_0^1 f(nx)\,\phi(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f(z)\left(\phi\left(\frac{i-1}{n}\right)+\varepsilon\right)dz =$$

$$= \int_0^1 f(z)\,dz \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\frac{i-1}{n}\right) + \varepsilon\right)$$

Siccome ϕ è continua !

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\frac{i-1}{n}\right) = \int_0^1 \phi(x)\,dx$$

"somme di Riemann"

(per semplicità: $f \geq 0$)

Dunque
$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\phi(x)\,dx \leq$$
$$\leq \int_0^1 f(z)\,dz \cdot \left(\int_0^1 \phi(z)\,dz + \varepsilon\right)$$

e in modo analogo

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\phi(x) \geq \int_0^1 f(z)\,dz\left(\int_0^1 \phi\,dz - \varepsilon\right)$$

Con $\varepsilon \to 0^+$ il risultato segue.

$\square$

Esercizio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia tale che $e^{tx} f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall x \in (-1,1)$

Sia $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tale che

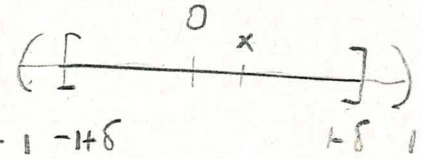
$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(t)\, dt$$

Studiare derivabilità

Derivata integranda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{tx} f(t)\right) = t e^{tx} f(t)$$

Sia $\delta > 0$ piccolo. Avremo



$$-1+\delta \le x \le 1-\delta$$

$$|t e^{tx} f(t)| \le |t|\, e^{t(1-\delta)} |f(t)| \qquad t>0$$

$$\le |t|\, e^{t(\delta-1)} |f(t)| \qquad t<0$$

$$\begin{cases} \le |t|\, e^{-t\delta/2}\, e^{t(1-\delta/2)} |f(t)| & t>0 \\ \le |t|\, e^{-|t|\delta/2}\, e^{t(-1+\delta/2)} |f(t)| & t<0 \end{cases}$$

$$\le \underbrace{|t|\, e^{-|t|\delta/2}}_{\le C_\delta < +\infty \ \forall t \in \mathbb{R}} \underbrace{\left(e^{t(1-\delta/2)} + e^{t(\delta/2-1)}\right)|f|}_{\in L^1(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow$ Posso derivare sotto integrale.

Esercizio Sia $f \in L^1(0,1)$ e definiamo $F:(0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(y)\, e^{-\frac{y}{x}}\, dy \ , \quad x>0$$

(1) Provare che F è continua su $(0,\infty)$

(2) Dare condizioni su f sufficienti affinché F si estenda in modo continuo fino a $x=0$

Soluzione.

(1) Fissiamo $x_0>0$. Per la caratterizzazione sequenziale della continuità

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0) \iff \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$$

per ogni successione $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

Sia $\delta>0$ tale che $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset (0,\infty)$.
Definitivamente si ha

$$x_n \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

e dunque

$$\left| \frac{1}{x_n} e^{-\frac{y}{x_n}} \right| \leq \frac{1}{x_0-\delta} \quad \text{definitivamente}$$

e quindi

$$\left| f(y) \frac{1}{x_n} e^{-\frac{y}{x_n}} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{x_0-\delta} |f(y)|}_{\text{maggiorante}} \in L^1(0,1)$$

Per convergenza dominata posso portare il limite dentro l'integrale

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} f(y)\, e^{-\frac{y}{x_n}}\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x_0} f(y)\, e^{-\frac{y}{x_0}}\, dy$$

$$= F(x_0)$$

(2) Fissiamo $0<\delta<1$. Allora

$$\sup_{\delta\le y\le 1} \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x} = \frac{e^{-\frac{\delta}{x}}}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

convergenza uniforme per $x\to 0^+$ su $[\delta,1]$

Dunque per CU (o anche CD)

$$\lim_{x\to 0^+} \int_\delta^1 f(y)\, \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x}\, dy = 0 \qquad \forall\, \delta>0.$$

Dobbiamo capire il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^\delta f(y)\, \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x}\, dy$$

con $\delta>0$ piccolo quanto vogliamo.

Quindi supponiamo che esista finito:

$$L = \lim_{y \to 0^+} f(y) \in \mathbb{R},$$

Esaminiamo

$$\int_0^\delta \frac{1}{x} e^{-y/x}\, dy = \left[-e^{-y/x} \right]_{y=0}^{y=\delta} =$$

$$= 1 - e^{-\delta/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

Congettura (Ansatz)

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = L$$

Fisso $\varepsilon > 0$,

$$F(x) - L = \int_0^\delta f(y) \frac{e^{-y/x}}{x} dy + \int_\delta^1 f(y) \frac{e^{-y/x}}{x} dy - L$$

$$= \int_0^\delta (f(y) - L) \frac{e^{-y/x}}{x} dy + L \int_0^\delta \frac{e^{-y/x}}{x} dy - L$$
$$+ \int_\delta^1 f(y) \frac{e^{-y/x}}{x} dy$$

Per $\delta > 0$ piccolo: $|f(y) - L| < \varepsilon \quad \forall\ 0 < y < \delta$:

$$|F(x) - L| \leq \int_0^\delta |f(y) - L| \frac{e^{-y/x}}{x} dy + |L| \left| \int_0^\delta \frac{e^{-y/x}}{x} dy - 1 \right|$$
$$+ \int_\delta^1 |f(y)| \frac{e^{-y/x}}{x} dy$$

$$\leq \varepsilon \left(1 - e^{-\delta/x}\right) + |L| \, e^{-\delta/x} + \int_\delta^1 |f(y)| \frac{e^{-y/x}}{x} \, dy$$

Dunque

$$\limsup_{x \to 0^+} |F(x) - L| \leq \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Questo prova che $\lim_{x \to 0^+} |F(x) - L| = 0.$

$\square$

Esercizio Sia $f \in C^1([0,1])$ una funzione tale che $f(0) = f(1) = 0$. Provare che

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 f'(x)^2\,dx.$$

Determinare tutte le funzioni per cui vale l'uguaglianza.

Soluzione. Per parti troviamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (x+\alpha)'\, f(x)\,dx \\ &= \Big[(x+\alpha)\, f(x)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x+\alpha)\, f'(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (-\alpha-x)\, f'(x)\,dx\end{aligned}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro che sarà da scegliere in modo opportuno. Con la disuguaglianza di Hölder

$$\left|\int_0^1 (\alpha+x)\, f'(x)\,dx\right| \le \left(\int_0^1 (\alpha+x)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 f'(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

dove

$$\int_0^1 (\alpha+x)^2\,dx = \left[\frac{(\alpha+x)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}\left((\alpha+1)^3 - \alpha^3\right)$$

Quindi troviamo

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{3}\left(3\alpha^2+3\alpha+1\right)\int_0^1 f'(x)^2\,dx.$$

Il minimo di $p(\alpha) = 3\alpha^2+3\alpha+1$ è per $0 = p'(\alpha) = 6\alpha+3$ ovvero per $\alpha = -1/2$.

Per tale scelta

$$\frac{1}{3}\left(3\alpha^2+3\alpha+1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+1\right) = \frac{1}{3}\ \frac{3-6+4}{4} = \frac{1}{12}.$$

Questo prova la disuguaglianza con la costante $1/12$.

L'unica disuguaglianza usata è quella di Hölder (e quella di subadditività). Precisamente:

$$\left|\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx\right| \overset{\circledast}{\leq} \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right| |f'(x)|\,dx \leq$$

$$\overset{\circledast\circledast}{\leq} \left(\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 f'(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

Se abbiamo uguaglianze in $\circledast$ e $\circledast\circledast$, allora deduciamo che

$\circledast \longrightarrow$ $\left(x-\frac{1}{2}\right) f'(x) \geq 0$ $\forall x$ oppure

$\left(x-\frac{1}{2}\right) f'(x) \leq 0$ $\forall x \in [0,1]$

$\circledast\circledast \longrightarrow$ $|f'(x)| = \lambda \left|x-\frac{1}{2}\right|$ per qualche $\lambda \geq 0$.

Dunque deve essere

$$f'(x) = \lambda\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \forall x \in [0,1]$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Ovvero

$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right) + \beta, \qquad \beta \in \mathbb{R},$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(x^2-x\right)$$

perché $f(0)=f(1)=0$ ($\Rightarrow \beta=0$).

$\square$

ESERCIZIO Al variare di $\alpha > 0$ studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{x^\alpha}^{1} \frac{e^t}{\sqrt{t + x^2}}\, dt .$$

Soluzione. Per chiarirmi le idee, studio prima la seguente funzione

$$g(x) = \int_{x^\alpha}^{1} \frac{1}{\sqrt{t + x^2}}\, dt$$

che è

$$g(x) = \left[2\sqrt{t + x^2} \right]_{t = x^\alpha}^{t = 1}$$

$$= \underbrace{2\sqrt{1 + x^2}}_{\text{è derivabile}} - 2\sqrt{x^\alpha + x^2}$$

Chiaramente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x^2}}{x} \quad \text{esiste finito} \iff \alpha \geq 2 .$$

Quindi g è derivabile in $x = 0 \iff \alpha \geq 2$.

In particolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1 - \sqrt{x^\alpha + x^2}}{x}$$

$$= -\infty \quad \text{per } 0 < \alpha < 2 .$$

Passiamo ad $f(x)$. Con una integrazione per parti

$$f(x) = \left[2\sqrt{t+x^2}\, e^t \right]_{t=x^\alpha}^{t=1} - 2\int_{x^\alpha}^1 \sqrt{t+x^2}\, e^t\, dt$$

$$= \underbrace{2\sqrt{1+x^2}\cdot e}_{\text{derivabile}} - \underbrace{2\sqrt{x^2+x^\alpha}\, e^{x^\alpha}}_{\substack{\text{derivabile in } x=0^+ \\ \text{per } \alpha \geq 2}} - 2\int_{x^\alpha}^1 \sqrt{t+x^2}\, e^t\, dt$$

Inoltre

$$\int_{x^\alpha}^1 \sqrt{t+x^2}\, e^t dt = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{t+x^2}\, e^t\, dt}_{\substack{\text{Derivabile } \forall x \\ \text{per i Teoremi noti} \\ \circledast}} - \underbrace{\boxed{\int_0^{x^\alpha} \sqrt{t+x^2}\, e^t\, dt}}_{\substack{\text{Derivabile in } x=0 \\ \text{per } \alpha > \frac{2}{3} \\ \circledast\circledast}}$$

$0 \leq x \leq 1$

$$\circledast \qquad \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{t+x^2}\, e^t = \frac{x}{\sqrt{t+x^2}}\, e^t \leq \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\, e^t \leq \frac{e^t}{\sqrt{t}} \in L^1(0,1) \right)$$

$$\leq e^t \in L^1(0,1)$$

$$\circledast\circledast \quad \lim_{x\to 0} \left| \frac{1}{x} \int_0^{x^\alpha} \sqrt{t+x^2}\, e^t \right| \leq \lim_{x\to 0} \left| \frac{1}{x} \sqrt{x^\alpha + x^2}\, e^{x^\alpha} \cdot x^\alpha \right|$$

$$\leq \lim_{x\to 0} \left| x^{\frac{3}{2}\alpha - 1} \sqrt{1+x^{2-\alpha}}\, e^{x^\alpha} \right| \overset{\frac{2}{3}<\alpha\leq 2}{=} 0 .$$

Questo prova che: $\alpha \geq 2 \implies f$ derivabile in 0.

Proviamo che $\alpha < 2 \Rightarrow f$ non è derivabile in 0.
(Il caso $\alpha \in (\frac{2}{3}, 2)$ è già chiaro).

Conti:

$$f(x) - f(0) = \int_{x^\alpha}^{1} \frac{e^t}{\sqrt{t+x^2}}\, dt - \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{x^\alpha}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{t+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) e^t\, dt}_{\leq 0} - \int_0^{x^\alpha} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\, dt \leq$$

È qui il contributo singolare

$$\leq - \int_0^{x^\alpha} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\, dt \leq - \int_0^{x^\alpha} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt =$$

$$= -2 \left[t^{1/2} \right]_{t=0}^{t=x^\alpha} = -2 x^{\alpha/2}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \lim_{x \to 0^+} -2 \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{x} = -\infty$$

se $\alpha < 2$.