Esercizio Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ una funzione tale che

$$\circledast \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Provare che $f(x) = ax^2$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Supponiamo preliminarmente che $f \in C^2(\mathbb{R})$. Derivando in $x$ la $\circledast$ si trova

$$(1) \qquad f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(x) \qquad y, x \in \mathbb{R},$$

ed in particolare

$$(2) \qquad f'(2x) + f'(0) = 2f'(x).$$

Derivando in $y$ la (1) si trova

$$(3) \qquad f''(x+y) - f''(x-y) = 0 \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

ed in particolare

$$(4) \qquad f''(2x) = f''(0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Integrando $f''$ = costante si trova

$$(5) \qquad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

NO e quindi $f'(x) = 2ax + b$ che sostituita in (2) fornisce $b = 0$. Quindi $f(x) = ax^2 + c$, che sostituita nella $\circledast$ con $x = y$ $(\to f(2x) + f(0) = 4f(x))$ fornisce $c = 0$.

Sostituire $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui

Ora proviamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, cosa che conclude la soluzione.

$\Downarrow$

$b = 0$ e $c = 0$

Sia $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un nucleo di regolarizzazione standard.

In particolare si ha $\chi(z) = \chi(-z)$.

Consideriamo

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(z)\, f(x-z)\, dz$$

con il cambio di variabile $w=-z$ si trova anche

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(-w)\, f(x+w)\, dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(w)\, f(x+w)\, dw .$$

Dunque

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(z)\, \frac{1}{2}\big(f(x-z) + f(x+z)\big)\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(z)\, \big(f(x) + f(z)\big)\, dz$$

$$= f(x) + \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(z)\, f(z)\, dz, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, questo prova che anche $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio Data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ consideriamo la serie di funzioni

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che la serie converge in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e q.o. e che $g$ è q.o. una funzione 1-periodica.

Soluzione. Prendiamo il compatto $K = [0,1]$. Vogliamo provare che

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,1]} \Big| \sum_{|k| \geq n} f(x+k) \Big| \, dx = 0.$$

Chiaramente

$$\int_{[0,1]} \Big| \sum_{|k| \geq n} f(x+k) \Big| \, dx \leq \int_{[0,1]} \sum_{|k| \geq n} |f(x+k)| \, dx =$$

$$= \int_{[0,1]} \lim_{N \to \infty} \sum_{N \geq |k| \geq n} |f(x+k)| \, dx \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{N \to \infty} \sum_{N \geq |k| \geq n} \int_{[0,1]} |f(x+k)| dx$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{N \geq |k| \geq n} \int_{[k,k+1]} |f(x)| dx = \int_{\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq n\}} |f| \, dx$$

Per convergenza dominata

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq n\}} |f(x)| \, dx = 0$$

Questo prova la convergenza in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ della serie. Lo stesso conto con $n=0$ mostra che

$$\int_{[0,1]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x+k)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty .$$

Quindi la serie

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

converge assolutamente in q.o. punto $x \in \mathbb{R}$.

Siano $x$ ed $x+1$ due punti di convergenza:

$$g(x+1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+1+k) \underset{\substack{\text{Teorema} \\ \text{sui riordinamenti}}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

$$= g(x) .$$

$\square$

Esercizio   Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $|a_n| \leq \log n$ per $n \geq 2$.
Provare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{1}{n^x}, \quad x \geq 2,$$

converge in $L^1(0,\infty)$

Soluzione. Certamente $n^{-x} \in L^1(2,\infty)$. Inoltre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^x} < +\infty$ $\forall x \geq 2$

Bisogna provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^{\infty} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k^x} \right| dx = 0,$$

Chiaramente

$$\int_2^{\infty} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k^x} \right| dx \leq \int_2^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|a_k|}{k^x} dx \leq$$

$$\leq \int_2^{\infty} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k^x}}_{\substack{\| \\ g(x) \geq 0}} dx$$

Se $g \in L^1(0,\infty)$ si può usare il Teorema della convergenza dominata e concludere.

Per convergenza monotona

$$\int_2^{\infty} g(x)\, dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{\log k}{k^x} dx =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \Big[ -k^{-x} \Big]_{x=2}^{x=\infty} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

$\square$

Esercizio Si consideri $f: (0,\infty)\times(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{-yx^2}\sin(y)$$

Provare che:

i) $\displaystyle\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\right)dx$ (Esistono e sono uguali)

ii) $f \notin L^1((0,\infty)\times(0,\infty))$

Soluzione. Dati $m,n\in\mathbb{N}$, $f$ è integrabile su

$$(0,m)\times(0,n)$$

perché è continua e limitata.

Per Fubini

$$\int_{(0,m)\times(0,n)} f(x,y)\,dxdy = \int_0^m\left(\int_0^n f(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^n\left(\int_0^m f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Voglio passare al limite per $m\to\infty$ ed $n\to\infty$ nell'identità

$$A = \int_0^m\left(\int_0^n e^{-yx^2}\sin(y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^n\left(\int_0^m e^{-yx^2}\sin(y)\,dx\right)dy = B$$

Conti:

$$B = \int_0^n \sin(y)\left(\int_0^{\sqrt{y}m} e^{-z^2}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dz\right)dy = \int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\left(\int_0^{\sqrt{y}m} e^{-z^2}dz\right)dy$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}}z$$

Per argomenti elementari, esiste

$$\lim_{m\to\infty} B = \int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \left( \lim_{m\to\infty} \int_0^{\sqrt{ym}} e^{-z^2} dz \right) dy$$

$$= \int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-z^2} dz}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}}$$

E comunque converge

E per il criterio di convergenza di Abel-Dirichlet per integrali oscillanti:

esiste $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} B = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$$ integrale improprio di Riemann

Studiamo A, Partiamo da qui:

$$\int_0^n e^{-yx^2} \sin(y)\, dy = \left[ \frac{e^{-yx^2}}{-x^2} \sin y \right]_{y=0}^{y=n} - \int_0^n \frac{e^{-yx^2}}{-x^2} \cos y \, dy$$

$$= \frac{e^{-nx^2} \sin(n)}{-x^2} + \frac{1}{x^2} \int_0^n e^{-yx^2} \cos(y)\, dy$$

$$= -\frac{e^{-nx^2} \sin(n)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \left( \left[ \frac{e^{-yx^2}}{-x^2} \cos(y) \right]_{y=0}^{y=n} - \int_0^n \frac{e^{-yx^2}}{-x^2} (-\sin y) dy \right)$$

$$= -\frac{e^{-nx^2}\sin n}{x^2} - \frac{1}{x^4}\left(e^{-nx^2}\cos n - 1\right) - \frac{1}{x^4}\int_0^n e^{-yx^2}\sin y\, dy$$

e quindi

$$\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\int_0^n e^{-yx^2}\sin(y)\, dy = -\frac{e^{-nx^2}\sin(n)}{x^2} - \frac{e^{-nx^2}\cos(n)-1}{x^4}$$

In definitiva:

$$A = \int_0^m \frac{1}{1+x^4}\left(1 - x^2 e^{-nx^2}\sin(n) - e^{-nx^2}\cos(n)\right) dx$$

Il limite per $m \to \infty$ (fatto prima) si può fare per convergenza dominata. Il limite per $n \to \infty$ si può pure fare e si trova

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} A = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx$$

Questo prova i). Inoltre abbiamo scoperto che

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy$$

si calcola!

ii) Dai conti precedenti:

$$\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_0^\infty \frac{|\sin(y)|}{\sqrt{y}}\,dy \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = +\infty$$

È noto che diverge!

ESERCIZIO   Si consideri la palla unitaria in $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$B = \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \; ; \; \|f\|_1 \leq 1 \}$$

(i) Provare che $B$ non è uniformemente integrabile.

(ii) Sia $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione assegnata.
Provare che l'insieme

$$G = \{ g * f \in L^1(\mathbb{R}^n) \; ; \; f \in B \}$$

è uniformemente integrabile

Soluzione. Un insieme $B \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ è uniformemente integrabile se:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\mathcal{L}^n(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| dx < \varepsilon$ per ogni $f \in B$

dove $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile.

Per $\lambda > 0$ parametro, la funzione

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n \lambda^n} & \text{se } |x| < \lambda \\ 0 & \text{se } |x| \geq \lambda \end{cases}$$

verifica $f_\lambda \in B$. Tuttavia per $\omega_n \lambda^n < \delta$ si ha $\mathcal{L}^n(B(0,\lambda)) < \delta$ mentre $\int_{B(0,\lambda)} |f(x)| dx = 1$.

(ii) Se $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sappiamo che

$$\|g * f\|_1 \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\mathcal{L}^n(A) < \delta \Rightarrow \int_A |g| dx < \varepsilon$$

per l'assoluta continuità dell'integrale.

Quindi

$$\int_A |g * f(x)|\,dx = \int_A \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\, f(y)\, dy \right| dx \leq$$

Tonelli

$$\leq \int_A \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\, |f(y)|\, dy\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_A |g(x-y)|\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{A-y} |g(z)|\, dz \right) dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \cdot \varepsilon\, dy = \varepsilon$$

in quanto $\mathcal{L}^n(A-y) = \mathcal{L}^n(A) < \delta$.

Esercizio Sia $(X,\mu)$ uno spazio di probabilità, sia $f \in L^1(X)$ con $f \geq 1$.

Provare che

$$(1) \qquad \int_X f(x) \log f(x)\, d\mu \geq \int_X f(x)\, d\mu \cdot \int_X \log f(x)\, d\mu$$

SOLUZIONE:

Noto che $\log f \in L^1(X)$ e che $f \log f \geq 0$.

Posso applicare Fubini-Tonelli. Considero

$$D = \int_X f(x) \log f(x)\, d\mu(x) - \int_X f(x)\, d\mu(x) \int_X \log f(y)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_X \left\{ \int_X f(x) \log f(x)\, d\mu(x) - \log f(y) \int_X f(x)\, d\mu(x) \right\} d\mu(y)$$

$$= \int_{X \times X} \left\{ f(x) \log f(x) - f(x) \log f(y) \right\} d\mu \otimes d\mu$$

Siccome le variabili $x$ e $y$ sono simmetriche trovo

$$D = \frac{1}{2} \int_{X \times X} \left\{ f(x) \log f(x) - f(x) \log f(y) + f(y) \log f(y) - f(y) \log f(x) \right\} d\mu \otimes d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_{X \times X} \left\{ f(x) \left( \log f(x) - \log f(y) \right) - f(y) \left( \log f(x) - \log f(y) \right) \right\} d\mu \otimes d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_{X \times X} \left( f(x) - f(y) \right) \left( \log f(x) - \log f(y) \right) d\mu \otimes d\mu \geq 0$$

perché $\log$ è monotona.

## Esercizio

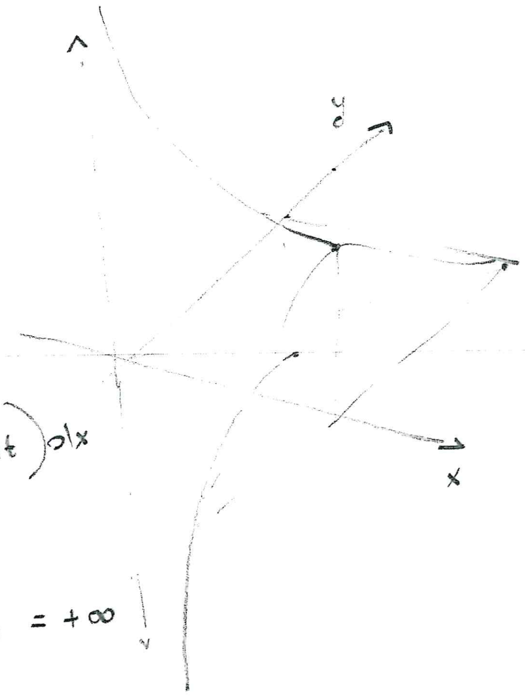
(a) Dire se la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è integrabile su $Q = [0,1]\times[0,1]$

(b) Calcolare gli integrali iterati nei due ordini

(c) Dire se esiste $\int_0^1 \left( \int_0^1 |f(x,y)|\, dx \right) dy$ (finito).




(a) Integro su $Q \cap \{x>y\} = Q_1$

$$\int_{Q_1} f \, dx dy \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx$$

$$\overset{y=xt}{=} \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2}{x^4} \, \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, x\, dt \right) dx$$

$$= \left( \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx \right) \left( \int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt \right) = +\infty \, !$$

Dunque $f$ non è integrabile su $Q_1$ e dunque neanche su $Q$ dal momento che per simmetria

$$\int_Q |f| \, dx dy = 2 \int_{Q_1} f \, dx dy .$$

(b) Calcolo

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \overset{y=xt}{=} \frac{1}{x} \int_0^{1/x} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt$$

Provo con $t = tg(s)$ ~~dt~~ $s = arctg(t)$ $\quad ds = \frac{1}{1+t^2}\, dt$

$$\int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = \int \frac{1-tg^2(s)}{1+tg^2(s)}\, ds = \int \frac{\cos^2(s)-\sin^2(s)}{1}\, ds$$

$$= \int \cos(2s)\, ds = \frac{\sin(2s)}{2} = \sin(s)\cos(s)$$

$$= tg(s)\cos^2(s)$$

Sviluppo $t\cos(s) = \sin(s)$, $t^2\cos^2(s) = (1-\cos^2(s))$

$$\cos^2(s) = \frac{1}{1+t^2}$$

Dunque

$$\int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{(1+t^2)}$$

Quindi

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \left[ arctg(x) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

E analogamente

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$