<u>Esercizio</u> Determinare tutti gli $\alpha>0$ tali che la funzione $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

sia a variazione totale limitata su $[0,1]$.

Soluzione. Per $\alpha>0$ è certamente $f \in C([0,1])$ e inoltre $f \in C^1(]0,1])$ per ogni $\alpha>0$.
La derivata per $x \neq 0$ è

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

É immediato vedere che per $\alpha>2$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

e quindi

$$\alpha>2 \implies f \in C^1([0,1]) \implies f \in BV([0,1]).$$

Osserviamo che per ogni $\alpha>0$ si ha $\alpha x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \in L^1(0,1)$
infatti

$$\int_0^1 \left|\alpha x^{\alpha-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx \leq \alpha \int_0^1 \frac{1}{x^{-\alpha+1}}\, dx < \infty .$$

Studiamo l'integrabilità di $x^{\alpha-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\int_0^1 \left|x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx = \int_0^1 \frac{|\sin(t)|}{t^{\alpha}}\, dt$$

Se $\alpha > 1$ si ha $\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \in L^1(1,\infty)$ e

quindi $x^{\alpha-2} \sin(\frac{1}{x}) \in L^1(0,1)$. Deduco che

$\forall x \in (0,1]$ ha senso ed è valida l'identità

$$f(x) = \int_0^x \underset{\underset{L^1(0,1)}{\cap}}{f'(t)}\, dt .$$

Quindi $f \in AC([0,1])$ $\forall \alpha > 1$ e pertanto

$$\alpha > 1 \Rightarrow f \in AC([0,1]) \Rightarrow f \in BV([0,1]).$$

Voglio provare che

$$0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow f \notin BV([0,1]).$$

Se fosse $f \in BV([0,1])$ dovrebbe essere:

i) $f'(x)$ esiste q.o. (vero nel nostro caso)

ii) $f' \in L^1(0,1)$, Da discutere, nel nostro caso

Affermo che $\frac{\sin t}{t^\alpha} \notin L^1(1,\infty)$ per $0<\alpha\leq 1$.

Da cui segue che $f' \notin L^1(0,1)$.

Infatti:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\pi/3 + k\pi}^{2\pi/3 + k\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right)^\alpha} \cdot \pi/3 = \infty \quad \text{per } \alpha \leq 1 .$$

Conclusione: $f \in BV([0,1]) \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Esercizio Sia $f \in L^1(0,1)$. Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $f \in L^2(0,1)$

2) Esiste $g \in AC([0,1])$ tale che $\forall x, y \in [0,1]$ si ha

$$\left| \int_{[x,y]} f(t)\, dt \right|^2 \leq \big(g(y) - g(x)\big)(y-x)$$

Soluzione 1) => 2) Disuguaglianza di Hölder:

$$\int_{[x,y]} |f(t)|dt \leq \left(\int_{[x,y]} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[x,y]} 1 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |x-y|^{1/2} \left(\int_{[x,y]} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\left| \int_{[x,y]} f(t)\, dt \right|^2 \leq |x-y| \int_{[x,y]} |f(t)|^2 dt =$$

$$= |x-y| \left| \int_0^y |f(t)|^2 dt - \int_0^x |f(t)|^2 dt \right|$$

$$= |x-y| \, |g(y) - g(x)|$$

$$= \big(g(y) - g(x)\big)(y-x)$$

dove $g(x) = \int_0^x |f(t)|^2 dt$ è crescente ed inoltre $g \in AC([0,1])$ essendo $|f|^2 \in L^1(0,1)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo $y > x$ e dividiamo per $(y-x)^2$

$$\left| \frac{1}{x-y} \int_x^y f(t)\, dt \right|^2 \le \frac{g(y) - g(x)}{y-x}$$

Sappiamo che per q.o. $x \in [0,1]$ si ha

- $$\lim_{y \to x^+} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)\, dt = f(x),$$

- esiste $$g'(x) = \lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y-x}.$$

Deduciamo che

$$|f(x)|^2 \le g'(x) \quad \text{per q.o. } x \in [0,1]$$

Siccome $g \in AC([0,1]) \Rightarrow g' \in L^1(0,1)$, la disuguaglianza prova che $f \in L^2(0,1)$.

$\square$

__Esercizio__ Sia $0 < \varepsilon < 1$. Costruire una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che:

(1) $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in [0,1]$ (1-Lip.)

(2) f cresce strettamente

(3) $\mathcal{L}^1(\{x \in [0,1] : f'(x) \text{ esiste e } f'(x) = 0\}) \geq 1 - \varepsilon$.

SOL. Sia $\{q_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : n \in \mathbb{N}\}$ una enumerazione di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Definiamo

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \subset \mathbb{R},$$

Allora

$$\mathcal{L}^1(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

e dunque l'insieme $E = [0,1] \setminus K$ verifica

$$\mathcal{L}^1(E) \geq 1 - \mathcal{L}^1(K) \geq 1 - \varepsilon$$

Definiamo $f : [0,1] \to [0,\infty)$

$$f(x) = \int_0^x \chi_K(t)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Siccome $\chi_E \in L^1(0,1)$, è certamente $f \in AC([0,1])$.

Di più:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_{[x,y]} \chi_K(t) dt \right| \leq \mathcal{L}^1([x,y]) = |x-y|.$$

Per $\mathcal{L}^1$-q.o. $x \in E = [0,1] \setminus K$ esiste la derivata e si ha

$$f'(x) = \chi_K(x) = 0 .$$

Questo prova il punto (3).

Verifichiamo il punto (2). Siano $0 \leq x < y \leq 1$ e sia $q_n \in \mathbb{Q}$ tale che (esiste certamente)

$$x < q_n < y .$$

Dunque

$$f(y) - f(x) = \int_x^y \chi_K(\xi)\, d\xi \geq$$

$$\geq \int_x^y \chi_{\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)}(\xi)\, d\xi \geq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, |x-y|\right\} > 0$$

e quindi $f(y) > f(x)$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $E \subset [0,1]$ un insieme di misura nulla. Costruire una funzione $f \in AC([0,1])$ crescente tale che

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = +\infty$$

per ogni $x \in E$.

Soluzione. Siano A_n, $n \in \mathbb{N}$, aperti tali che:

(1) $E \subset A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n$

(2) $\mathcal{L}^1(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$

Esistono perché $\mathcal{L}^1(E) = 0$.

Definiamo

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(t)\, dt \quad , \quad x \in [0,1]$$

$$\overset{CM}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \chi_{A_n}(t)\, dt$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 1$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \in L^1(0,1)$ e dunque $f \in AC([0,1])$.

Sia ora $x \in E$. Dato $n \in \mathbb{N}$ sia $\delta(n) > 0$ tale che

$$(x-\delta(n), x+\delta(n)) \subset A_n$$

(A_n è aperto e $x \in A_n$).

Dunque per $0 < |\delta| < \delta(n)$ avremo $x+\delta \in A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_1$

Più precisamente:

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(t)}_{\substack{\geq n \text{ se } \ \forall t \\ |\delta|<\delta_0}} \, dt \geq$$

$$\geq n \quad \text{se} \quad |\delta| < \delta_0 .$$

Questa è la tesi.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f \in AC([0,1])$. Provare che

$$V(f) = \int_0^1 |f'(x)|\, dx .$$

Soluzione. Sappiamo che

$$\int_0^1 |f'(x)|\, dx \leq V(f)$$

(Vale $\forall f \in BV([0,1])$). Proviamo la disuguaglianza opposta. Sia $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ una suddivisione di $[0,1]$. Allora:

$$\sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \overset{\text{TFCI}}{=} \sum_{x_i \in \sigma} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{x_i \in \sigma} \int_{[x_{i-1}, x_i]} |f'(x)|\, dx = \int_{[0,1]} |f'(x)|\, dx$$

Passando al sup su $\sigma \in S([0,1])$ trovo la tesi.

$\square$

ESERCIZIO Sia $h \in L^1([0,1])$ una funzione assegnata. Provare che esiste un'unica soluzione $f \in L^1([0,1])$ dell'equazione

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \log(1+f(y)^2)\,dy$$

per q.o. $x \in [0,1]$

Soluzione. Sappiamo che $\log(1+t^2) \leq Ct \quad \forall t \geq 0$ per qualche costante $C>0$. Dunque

$$\int_0^1 \int_0^x \log(1+f(y)^2)\,dy\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^x C\,|f(y)|\,dy\,dx \leq C\,\|f\|_1$$

Dunque $T : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$

$$Tf(x) = h(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \log(1+f(y)^2)\,dy$$

è ben definito.

Sappiamo che $L^1([0,1])$ è uno spazio di Banach. Se T è una contrazione l'affermazione segue dal Teorema di punto fisso di Banach.

$$Tf(x) - Tg(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\log(1+f(y)^2) - \log(1+g(y)^2)\right)dy$$

Studio la funzione $\phi(t) = \frac{1}{2}\log(1+t^2)$:

$$\phi'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{2t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall t \geq 0.$$

Quindi

$$\left| \frac{1}{2}\left(\log(1+f(y)^2) - \log(1+g(y)^2) \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} |f(y) - g(y)|$$

e quindi

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^x |f(y) - g(y)| \, dy$$

$$\leq \frac{1}{2} \| f - g \|_1$$

e integrando su $[0,1]$:

$$\| Tf - Tg \|_1 \leq \frac{1}{2} \| f - g \|_1 .$$

$\square$