Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 21/1/2020

Esercizio 1 Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^{3/2}+x^{3/2}}.$$

i) (2pt) Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_\varepsilon > 0$ tale che $\log(1+t) \leq C_\varepsilon + t^\varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.

ii) (8pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

Risposte: ii) La serie converge uniformemente per $x \in$

Esercizio 2 Dato un parametro $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^\alpha\right)}{|x-y|} \qquad \text{se } x \neq y,$$

ed $f(x,y) = 0$ se $x = y$.

i) (6pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) (4pt) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) continua se $\alpha \in$; ii) differenziabile se $\alpha \in$

Esercizio 3 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 - 1 \\ y(0) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

i) (2pt) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

ii) (4pt) Studiare la monotonia della soluzione. Provare preliminarmente che $y(x) \geq \tan(\pi/3 - x)$ per $x \in [0,1]$ ed osservare che $y = -x$ risolve l'equazione differenziale.

iii) (3pt) Studiare la convessità della soluzione.

iv) (2pt) Tracciare un grafico della soluzione massimale.

v) (facoltativo) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy.

Risposte: iv) Grafico:

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^{3/2}+x^{3/2}} .$$

1) Provare preliminarmente che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ c_\varepsilon > 0$ tale che $\log(1+t) \leq c_\varepsilon + t^\varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.

2) Studiare la convergenza uniforme della serie $(*)$

Risoluzione. 1) Sappiamo che

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log(1+t)}{t^\varepsilon} \overset{H}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{(1+t)\,\varepsilon\, t^{\varepsilon-1}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{t \to \infty} \frac{t}{(1+t)\, t^\varepsilon} = 0$$

Dunque esiste $M_\varepsilon > 0$ tale che $\log(1+t) \leq t^\varepsilon$ per $t \geq M_\varepsilon$.
Detto $c_\varepsilon = \max_{0 \leq t \leq M_\varepsilon} \log(1+t) > 0$ si trova la stima cercata.

2) Usando il punto 1) si stima

$$\frac{\log(1+nx)}{n^{3/2}+x^{3/2}} \leq \frac{c_\varepsilon + (nx)^\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}}$$

dove $\varepsilon > 0$ è da scegliere con cura.

Certamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}} \overset{\forall x \geq 0}{\leq} C_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Dunque questa serie converge unif su $[0,\infty)$ per il crit. Weierstrass.

Studiamo la convergenza uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}} .$$

Voglio "collegare" $n \cdot x$ con il denominatore.
Abbiamo $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Scegliamo $a = n^{3/4}$ e $b = x^{3/4}$. In questo modo:

$$(nx)^{\frac{3}{4}} = n^{\frac{3}{4}} x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2}\left(n^{3/2} + x^{3/2}\right)$$

e quindi

$$(nx)^\varepsilon \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4\varepsilon}{3}}}_{= D_\varepsilon} \left(n^{3/2} + x^{3/2}\right)^{\frac{4\varepsilon}{3}}$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^\varepsilon}{n^{3/2}+x^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} D_\varepsilon \frac{1}{(n^{3/2}+x^{3/2})^{1-4\varepsilon/3}} \leq \boxed{\text{se } 1-\frac{4\varepsilon}{3}>0}$$

$$\leq D_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}(1-4\varepsilon/3)}}$$

Ora scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo tale che

$$\frac{3}{2}\left(1 - \frac{4\varepsilon}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

ovvero $\varepsilon = \frac{1}{12}$. Concretamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^{\frac{1}{12}}}{n^{3/2} + x^{3/2}} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < \infty$$

Conclusione: La serie data converge uniformemente su tutto $[0, \infty)$

ESERCIZIO Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \frac{\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha)}{|x-y|} \quad \text{se} \quad x \neq y$$

ed $f(x,y) = 0$ se $x = y$.

1) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione. 1) Per $y = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}{|x|} \cdot \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} |x|^{\frac{\alpha}{2} - 1} = 0 \iff \frac{\alpha}{2} > 1$$

Dunque: $\alpha \leq 2 \Rightarrow f$ non è continua in 0.

Usando $|\sin t| \leq |t|$:

$$\frac{\sin(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha)}{|x-y|} \leq \frac{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^\alpha}{|x-y|} = \frac{||x| - |y||^\alpha}{|x-y|(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^\alpha} = \frac{|x-y|^{\alpha-1}}{(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^\alpha}$$

Usando $|x-y| \leq |x| + |y|$ e

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x| + |y|}$$

si arriva a

$$\frac{\sin\left(|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^{\alpha}\right)}{|x-y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^{\alpha-1}}{(|x|+|y|)^{\alpha/2}} = (|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Per confronto deduciamo che

$$\frac{\alpha}{2} - 1 > 0 \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Dunque

$$f \text{ cont. in } 0 \iff \alpha > 2.$$

2) Vediamo quando f ha le derivate parziali in 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big(f(x,0) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0,0)}}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{\sin(|x|^{\frac{\alpha}{2}})}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha/2}}{x|x|} \implies \text{se e solo se } \frac{\alpha}{2} > 2$$

ovvero: $\alpha > 4$.

Se $\alpha \leq 4$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste e dunque f non è diff. in 0. Analogamente per $\alpha > 4$ si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Per il test della differenziabilità, f è diff.bile in 0 se

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right|^{\alpha} \right)}{\sqrt{x^2+y^2}\ |x-y|}$$

Come sopra, si stima

$$\frac{\left| \sin\left(\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right|^{\alpha} \right) \right|}{\sqrt{x^2+y^2}\ |x-y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2}\, \frac{(|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{|x|+|y|} \leq$$

usato: $\sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)$

$$\leq \sqrt{2}\, (|x|+|y|)^{\frac{\alpha}{2}-2} \xrightarrow{\text{se } \alpha > 4} 0 .$$

Conclusione: f è diff.bile in 0 $\iff$ $\alpha > 4$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 - 1 \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$.

2) Studiare la monotonia della soluzione. Provare preliminarmente che $y(x) \geq tg\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ per $x \in [0, 1)$ e osservare che la retta $y = -x$ risolve l'eq. diff.

3) Studiare la convessità della soluzione

4) Tracciare un grafico della soluzione massimale

5) Facoltativo : Calcolare la soluzione.

Risoluzione 1) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ è in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Per il Teorema di Cauchy - Lipschitz esiste un'unica soluzione locale

2) Abbiamo $y' = x^2 - y^2 - 1 \geq -y^2 - 1$ e

dunque

$$\frac{y'}{y^2+1} \geq -1 .$$

Integrando su $[0, x]$:

$$\operatorname{arctg} y(x) - \underbrace{\operatorname{arctg} \underbrace{y(0)}_{= \sqrt{3}}}_{= \frac{\pi}{3}} = \int_0^x \frac{y'}{y^2+1}\, dt \geq -\int_0^x 1\, dt = -x$$

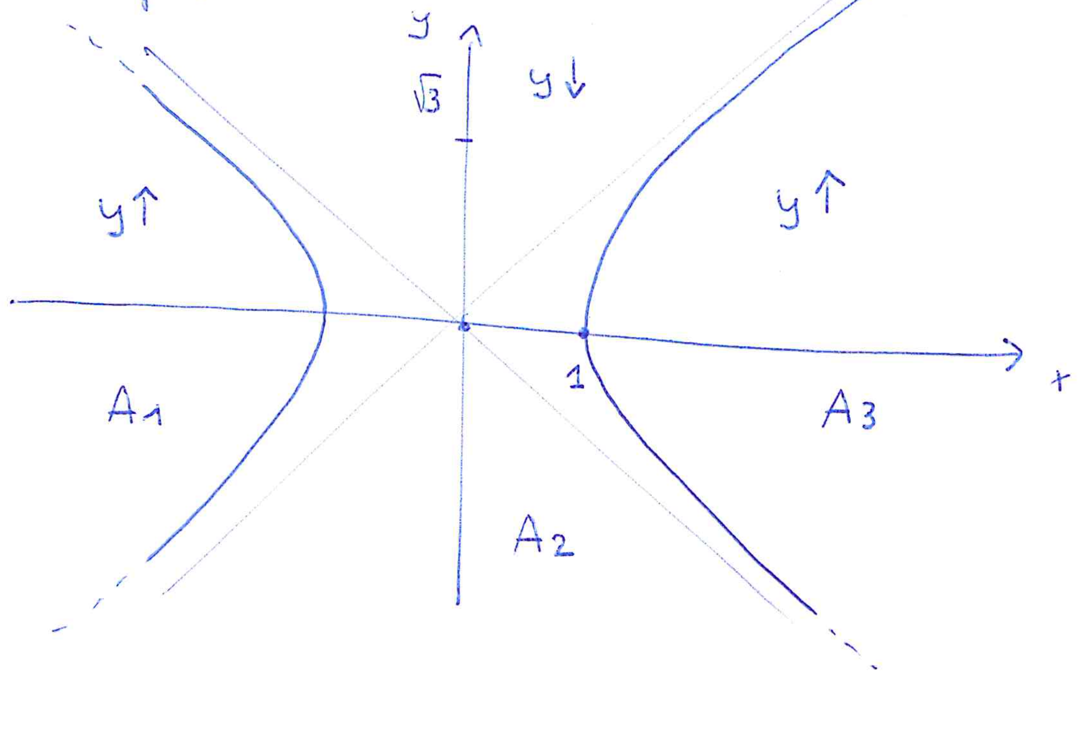
e quindi $\operatorname{arctg} y(x) \geq \frac{\pi}{3} - x$ e invertendo

si trova la tesi

Abbiamo $f(x,y) < 0 \iff x^2 - y^2 - 1 < 0$

$\iff x^2 < 1 + y^2$

A livello grafico abbiamo dunque



Dunque, intorno al punto $(0, \sqrt{3}) \in A_2$ la soluzione decresce.

Siccome $y(1) \geq tg\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) > 0$, deduciamo che la soluzione deve entrare nella regione A_3, dove y inizia a crescere.

Dalla regione A_3 y non può più uscire e quindi y continua a crescere per sempre.

Dai criteri di prolungamento noti deduciamo che $b = +\infty$ al punto 4), con $b =$ estremo destro massimale.

Osservo che la funzione $y = -x$ risolve l'equazione differenziale $y' = x^2 - y^2 - 1$. Per l'unicità della soluzione deduco che la mia soluzione $y(x)$ non può toccare la retta $y = -x$.
Quindi la soluzione $y(x)$ non può entrare nella regione A_1. Quindi per $x \leq 0$ la soluzione è decrescente.

~~4) $b = +\infty$ è già provato. Supponiamo che y sia definita su $[-1, 0]$. (Altrimenti è $a \geq -1$). Certamente $y(-1) \geq \sqrt{3}$.~~

3) Abbiamo

$$y'' = 2x - 2yy' = 2\left[x - y\left(x^2 - y^2 - 1\right)\right]$$

$$= 2\left[x + y - y\left(x^2 - y^2\right)\right] = 2(x+y)\left[1 - y(x-y)\right]$$

Sappiamo che $x+y>0$. Dunque

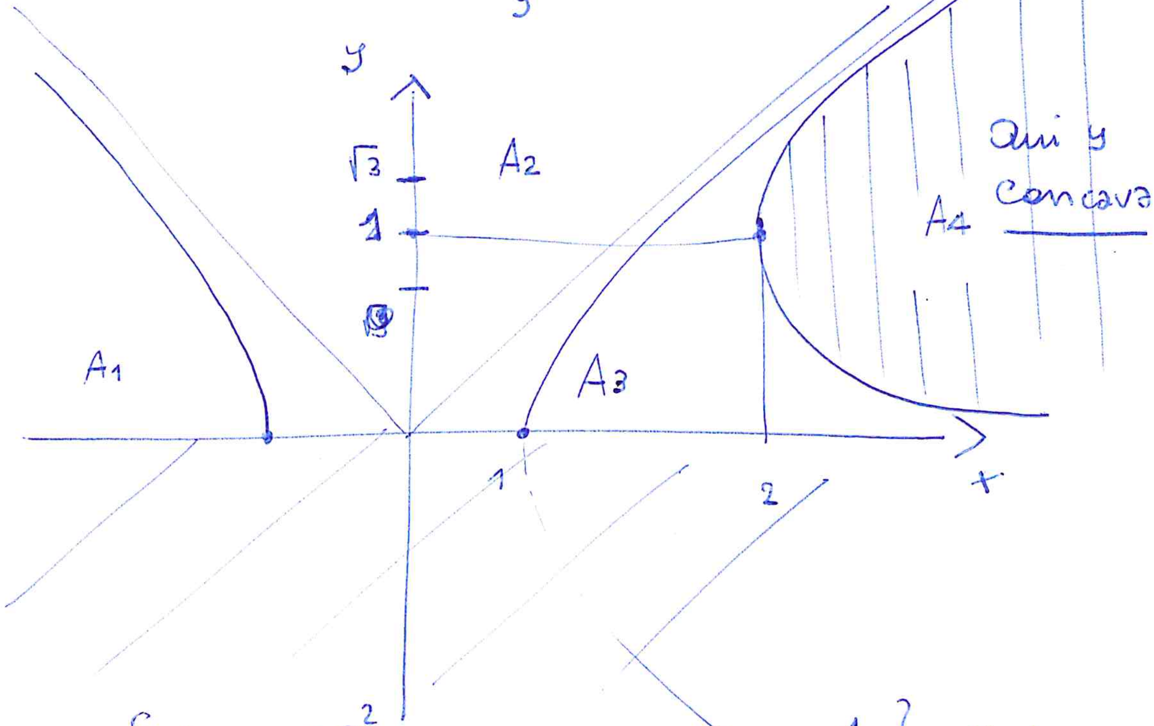
$$y'' > 0 \iff 1 - y(x-y) > 0$$

$$\iff 1 + y^2 > yx$$

Sappiamo dalla discussione sulla monotonia che $y>0$

Dunque

$$y'' > 0 \iff x < y + \frac{1}{y}$$



Sia $A_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>0 \text{ e } x > y + \frac{1}{y} \right\} \subset A_3$.

La soluzione <u>deve</u> entrare in A_4.

Nella regione A_4 la soluzione è concava.

Fuori da A_4 è convessa.

4) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. La discussione precedente mostra che $b = +\infty$.

Proviamo che $a > -\infty$ (Non era richiesto nel compito).

Siccome y è convessa in tutta A_2, per $x \leq 0$ si ha $y(x) \geq -4x + \sqrt{3}$ (Retta tangente al grafico in $x=0$).

In particolare si ha $y(x) \geq -4x$ e quindi $y(x)^2 \geq 16x^2$.

Dunque

$$y' = x^2 - y^2 - 1 \leq \frac{1}{16} y^2 - y^2 - 1 = -\frac{15}{16} y^2 - 1$$

da cui

$$= \int_x^0 \frac{y'}{\frac{15}{16} y^2 + 1} \, dt \leq -\int_x^0 dt = x$$

$$= \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} y \right) \right]_x^0 = \frac{4}{\sqrt{15}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \sqrt{3} \right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4} y(x) \right) \right]$$

Si trova la stima

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\,y(x)\right) \geq -\frac{\sqrt{15}}{4}\,x + \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$$

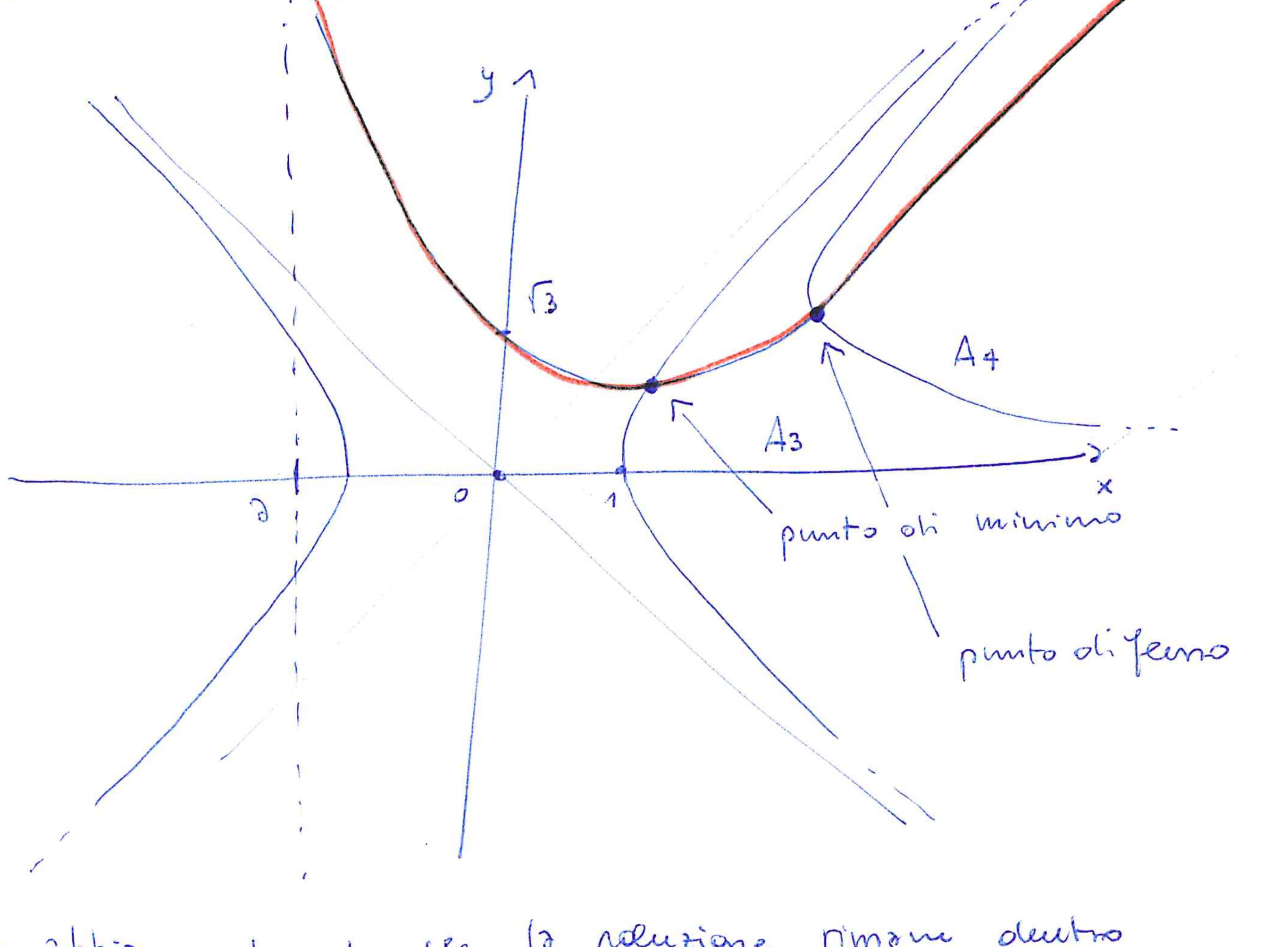
e infine

$$\frac{\sqrt{15}}{4}\,y(x) \geq \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right) - \frac{\sqrt{15}}{4}\,x\right)$$

Quindi $y(x) \to +\infty$ per $x \to a^+$ in tempo finito.

Ovvero $a > -\infty$.

Conclusione grafica :



Non abbiamo provato che la soluzione rimane dentro A_4 per sempre.

5) Con la sostituzione $y = z - x$ si ha $y' = z' - 1$

e l'eq. diff. diventa

$$z' - 1 = y' = x^2 - y^2 - 1 = x^2 - (z-x)^2 - 1$$

ovvero $z' = -z^2 + 2zx$. È di Bernoulli.

Altra sostituzione $z = w^\alpha$ con $z' = \alpha w^{\alpha-1} w'$

e quindi

$$\alpha w^{\alpha-1} w' = -w^{2\alpha} + 2w^\alpha x$$

$$\alpha w' = -w^{\alpha+1} + 2wx$$

Con la scelta $\alpha = -1$ diventa lineare e precisamente

$$-w' = -1 + 2wx \iff w' = -2wx + 1$$

La soluzione di $w' = -2xw$ è $w(x) = ce^{-x^2}$

Con la variazione della costante $c = c(x)$:

$w' = c'e^{-x^2} + c(-2x)e^{-x^2}$. Dunque $w' = -2wx + 1$

diventa

$$c'e^{-x^2} - 2x\cancel{c}e^{-x^2} = -2\cancel{x}e^{-x^2} + 1$$

da cui $c(x) = c_0 + \int_0^x e^{t^2}dt$, $c_0 \in \mathbb{R}$.

Si trova allora

$$z = w(x)^{-1} = \left[e^{-x^2}\left(c_0 + \int_0^x e^{t^2}dt\right)\right]^{-1}$$

e infine

$$y(x) = -x + \frac{e^{x^2}}{c_0 + \int_0^x e^{t^2}\,dt} .$$

Per $x = 0$

$$\sqrt{3} = y(0) = \frac{1}{c_0} \implies c_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Abbiamo scoperto che $a < 0$ è esattamente la soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \int_0^a e^{t^2}\,dt = 0 .$$

$\square$