Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 13/2/2020

Esercizio 1 Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x^2 n + 1}.$$

i) (2pt) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente.

ii) (6pt) Studiare la convergenza uniforme della serie.

iii) (2pt) Stabilire se c'è convergenza uniforme su $[-1, 1]$.

Risposte: i) converge punt. per $x \in$	ii) converge unif. per $x \in$

Esercizio 2 Sia $C([0,1])$ lo spazio delle funzioni continue su $[0,1] \subset \mathbb{R}$ munito della norma del sup $\|\cdot\|_\infty$ e sia $X = \{f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa. Sia poi $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ l'applicazione

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad x \in [0,1],$$

e definiamo l'insieme di funzioni $Y = T(X) \subset C([0,1])$.

i) (2pt) Dire se Y è equilimitato.

ii) (3pt) Provare che per ogni $f \in X$ si ha

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq 2\sqrt{|x-y|}.$$

iii) (3pt) Dire se $\bar{Y}$, la chiusura di Y, è compatto in $C([0,1])$.

iv) (2pt) Stabilire se Y è compatto.

Risposte: i) equilim. si/no:	; iii) $\bar{Y}$ compatto:	; ii) Y compatto:

Esercizio 3 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^x - y}{e^x + y} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

i) (2pt) Provare che esiste un'unica soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

ii) (3pt) Studiare la monotonia della soluzione.

iii) (3pt) Studiare la convessità della soluzione.

iv) (2pt) Provare che la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$ e tracciarne un grafico.

v) (facoltativo) Studiare l'esistenza di asintoti a $\pm\infty$.

Risposte: iv) Grafico:

3 ore a disposizione

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x^2 n + 1} .$$

i) Studiare la convergenza puntuale.

ii) Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione i) Per $x=0$ la serie converge con somma 0.
Sia $x \neq 0$. Usando $|\sin t| \leq |t|$ si trova:

$$\left| \frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x^2 n + 1} \right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{n}\,(x^2 n+1)} = \frac{|x|}{\sqrt{n}\; x^2 (n + \frac{1}{x^2})} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x|\; n^{3/2}}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ deduciamo che la serie converge (assolutamente) per ogni $x \neq 0$.

Conclusione: Convergenza puntuale per $x \in \mathbb{R}$.

ii) Sia $\delta > 0$. Dai conti precedenti segue che

$$\sup_{|x| \geq \delta} \left| \frac{\sin(\frac{x}{\sqrt{n}})}{x^2 n + 1} \right| \leq \frac{1}{\delta} \, \frac{1}{n^{3/2}}$$

Per il criterio di Weierstrass c'è convergenza uniforme su $\{|x| \geq \delta\}$ per ogni $\delta > 0$.
Adesso proviamo che non c'è convergenza uniforme su $[0,1]$.

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{x^2 n + 1} .$$

Sappiamo che $f(0) = 0$. Proveremo che f non è continua in $x=0$. Questo dimostrerà che la serie non converge uniformemente su $[0,1]$.

Fissiamo $x \in (0,1]$. La funzione $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$g(t) = \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{x^2 t + 1} , \qquad t > 0 ,$$

è certamente decrescente per $t > 1$. Dunque

$$t \in [n, n+1) \implies g(t) \leq g(n) .$$

Quindi possiamo confrontare serie ed integrale:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{x^2 n + 1}}_{= g(n)} \geq \int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{x^2 t + 1} \, dt \overset{t = \frac{1}{x^2} s}{=}$$

$$= \int_{x^2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{s}}\right)}{s+1} \frac{1}{x^2} \, ds \overset{\substack{\text{per } t \in [0,1) \\ \sin t \geq \frac{t}{2}}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{x^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}\,(s+1)} \, ds .$$

Deduciamo che

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} f(x)}_{\text{se esiste...}} \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}\,(s+1)}\, ds > 0.$$

Quindi f non è continua in 0.

$\square$

ESERCIZIO Sia $C([0,1])$ con la norma del sup e sia $X = \{ f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1 \}$. Sia poi

$T : C([0,1]) \to C([0,1])$

$$Tf(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt, \qquad x \in [0,1],$$

e definiamo $Y = T(X) \subset C([0,1])$.

i) Dire se Y è equilimitato.

ii) Dire se Y è ~~con equilimitato~~ equicontinuo.

iii) Dire se $\overline{Y}$ è compatto.

iv) Dire se Y è compatto.

Risoluzione i)

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\, dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} =$$

$$= \|f\|_\infty\, 2\sqrt{x} \underset{0 \leq x \leq 1}{\leq} 2\|f\|_\infty$$

Quindi $\|Tf\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \leq 2$ se $f \in X$.

Dunque Y è equilimitato

ii) Sia $f \in X$. Allora

$$|Tf(x) - Tf(y)| = \left| \int_y^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq$$

$$\underset{0 \leq y < x \leq 1}{\leq} \int_y^x \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\, dt \leq \|f\|_\infty\, 2(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

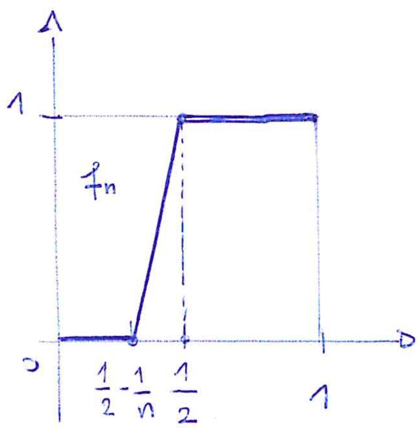
Dunque per ogni $x, y \in [0,1]$

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq 2\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = 2\,\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq 2\sqrt{|x-y|}$$

Dalla stima segue che Y è equicontinuo.

iii) $\overline{Y}$ è chiuso, equicontinuo ed equilimitato. Infatti equicontinuità e limitatezza passano alla chiusura. Dunque $\overline{Y}$ è compatto per il Teorema di Ascoli - Arzelà.

iv) Y non è compatto perché non è chiuso. Siano $f_n : [0,1] \to [0,1]$ le funzioni (continue) in figura:



Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left.\begin{cases} 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \end{cases}\right\} := f_\infty(x)$$

Chiaramente f_∞ non è continua.

É facile vedere che

$$T(f_n) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} T(f_\infty) \quad \text{uniformemente su } [0,1]$$

Quindi $T(f_\infty) \in \overline{Y}$, per la caratterizzazione sequenziale della chiusura. Tuttavia $T(f_\infty) \notin Y$ perché f_∞ non è continua (non è un elemento di X).

Proviamo la convergenza uniforme sopra:

$$\left| T(f_n)(x) - T(f_\infty)(x) \right| = \left| \int_0^x \frac{f_n(t) - f_\infty(t)}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{|f_n(t) - f_\infty(t)|}{\sqrt{t}}\, dt = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(t)}{\sqrt{t}}\, dt \leq$$

$$\leq \int_{1/2-1/n}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ indipendentemente da $x \in [0,1]$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^x - y}{e^x + y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

i) Provare che esiste un'unica soluzione locale

ii) Studiare la monotonia

iii) Studiare la convessità

iv) Disegnare il grafico della soluzione massimale

v) Calcolare eventuali asintoti a $\pm\infty$.

Risoluzione. i) La funzione $f(x,y) = \dfrac{e^x - y}{e^x + y}$ è definita per $y \neq -e^{+x}$. Tenuto conto della condizione iniziale, consideriamo

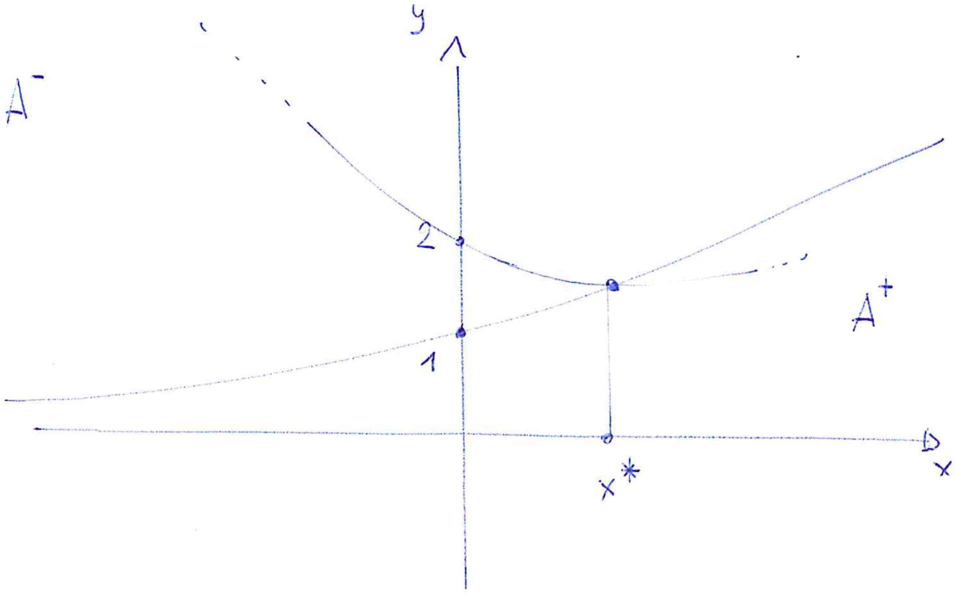
$$A = \{(x,y) : y > -e^x\}.$$

Chiaramente $f \in C^\infty(A)$ e quindi è loc. di Lipschitz.

Dalla teoria segue che esiste $y \in C^\infty(-\delta,\delta)$, $\delta > 0$, soluzione unica del problema di Cauchy.

ii) Limitatamente a $e^x + y > 0$, si ha:

$$f(x,y) > 0 \iff e^x - y > 0 \iff y < e^x$$



Quindi in $A^- = \{(x,y) \in A : \ y > e^x\}$ la soluzione decresce,

in $A^+ = \{(x,y) \in A : \ y < e^x\}$ la soluzione cresce.

Per $x = 0$ la soluzione è in A^- e quindi decresce.
Deduciamo che la soluzione decresce per ogni $x < 0$.
Inoltre deve entrare in A^+ (esiste $x^* > 0$ tale che $y'(x^*) = 0$)
e non può più uscire da A^+. Quindi per $x > x^*$
la soluzione rimane crescente.

iii) Derivata seconda:

$$y'' = \frac{(e^x - y')(e^x + y) - (e^x - y)(e^x + y')}{(e^x + y)^2} = \frac{2e^x(y - y')}{(e^x + y)^2}$$

Dunque

$$y'' > 0 \iff y - y' > 0 \iff y - \frac{e^x - y}{e^x + y} > 0$$

$$\overset{e^x + y > 0}{\iff} y e^x + y^2 - e^x + y > 0$$

$$\boxed{\cancel{\iff -y^2 - (e^x + 1)y + e^x < 0}}$$

Questo implica che y non può sviluppare asintoti verticali in tempo finito.

Dunque la soluzione massimale è definita per $x \in \mathbb{R}$.

v) Abbiamo

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \frac{e^t - y(t)}{e^t + y(t)}\, dt =$$

$$= 2 + \int_0^x \left(1 - \frac{2y(t)}{e^t + y(t)}\right) dt$$

$$= 2 + x - 2\int_0^x \frac{y(t)}{e^t + y(t)}\, dt .$$

Osserviamo che l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{y(t)}{e^t + y(t)}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{y(t)}{e^t + g(t)}\, dt$$

converge in quanto $0 < y(t) < t+2$ per $t > 0$.

Quindi $y = x + 2 - 2\int_0^\infty \frac{y(t)}{e^t + y(t)}\, dt$ è un asintoto per $x \to \infty$.

Analogamente:

$$y(x) \overset{x<0}{=} 2 + \int_0^x \frac{e^t - y(t)}{e^t + y(t)}\, dt = 2 - \int_x^0 \left(-1 + \frac{2e^t}{e^t + y(t)}\right) dt$$

$$= 2 - x - 2\int_x^0 \frac{e^t}{e^t + y(t)}\, dt$$

Ora osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

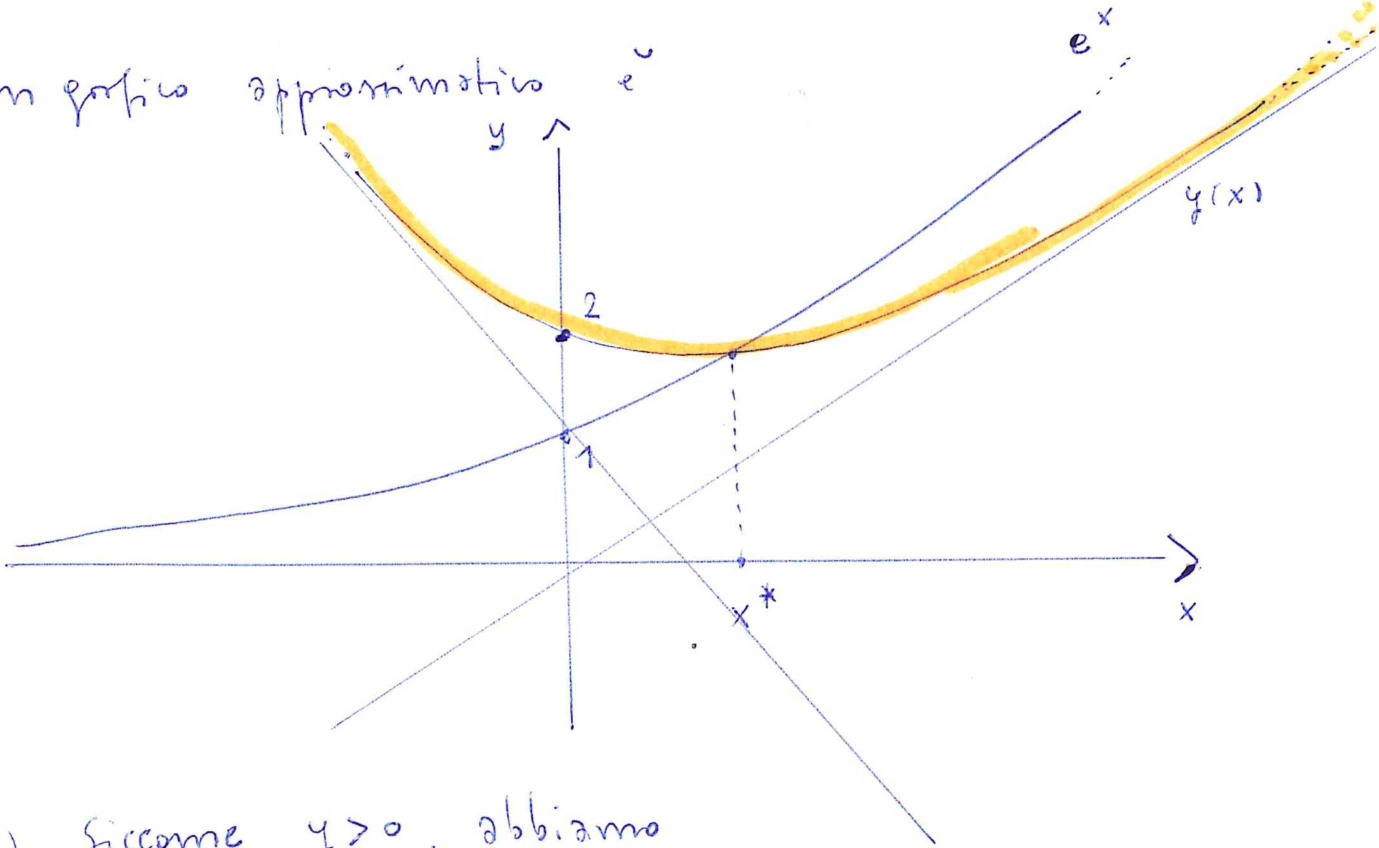
$$y(x) \geq y(x^*) = e^{x^*} > 1$$

Di conseguenza

$$y e^x + y^2 - e^x + y = e^x \underbrace{(y-1)}_{>0} + \underbrace{y^2 + y}_{>0} > 0.$$

Quindi y è convessa (strettamente) su tutto $\mathbb{R}$.

Un grafico approssimativo è



iv) Siccome $y > 0$, abbiamo

$$|y'| = \left| \frac{e^x - y}{e^x + y} \right| = \frac{|e^x - y|}{e^x + y} \leq \frac{e^x + y}{e^x + y} = 1.$$

con integrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{e^t + y(t)}\, dt$ che converge.

Quindi

$$y = -x + 2 - 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{e^t + y(t)}\, dt$$

è un asintoto per $x \to -\infty$.

$\square$