Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: 26/6/2020 - Modalità telematica

INSTRUZIONI:
Spedire le soluzioni in bella copia manoscritta e controfirmata in ogni pagina come unico file pdf all'indirizzo monti@math.unipd.it entro le ore 10.40. Estensione del file:

`cognome_nome_matricola.pdf`

Il mancato rispetto di tali regole comporterà l'annullamento della prova.

Esercizio 1 Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \log\left(\dfrac{1+y^2}{1+x^2}\right) - 1 \\ y(0) = \sqrt{e-1}. \end{cases}$$

i) Disegnare un grafico motivato della soluzione massimale del problema.

ii) Detta y la soluzione massimale, provare che esistono e calcolare i seguenti limiti

$$L^{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}.$$

Esercizio 2 Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{\sqrt{n} + nx^2}.$$

i) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[1, \infty)$.

ii) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[0, 1]$.

---

1 ora e 30 minuti a disposizione + 10 minuti per la consegna del file

Esercizio Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\dfrac{1+y^2}{1+x^2}\right) - 1 \\ y(0) = \sqrt{e-1} \end{cases}$$

1) Disegnare un grafico motivato della soluzione massimale.

2) Provare che esistono e calcolare i seguenti limiti

$$L^{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}.$$

Risoluzione. Abbiamo $f(x,y) = \log\left(\dfrac{1+y^2}{1+x^2}\right) - 1$

che è $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dunque esiste unica la soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta,\delta)$ per qualche $\delta > 0$.

Osserviamo che $\log(1+y^2) \le C + |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Dunque per ogni $K \subset \mathbb{R}$ compatto esiste C_K tale che

$$|f(x,y)| \le C_K(1+|y|) \quad \forall y \in \mathbb{R} \; \forall x \in K.$$

Segue che la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$, $y \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Studiamo la monotonia della soluzione. Si ha:

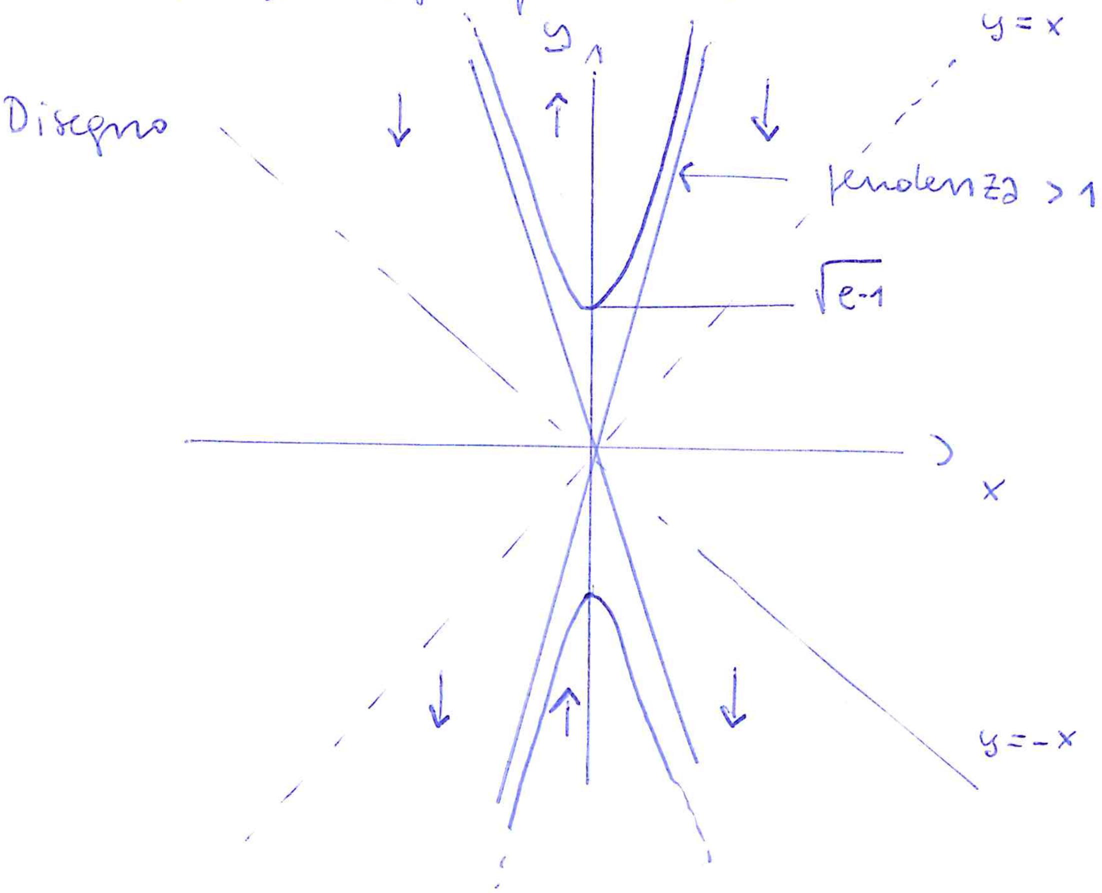
$$f(x,y) > 0 \iff \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right) > 1$$

$$\iff \frac{1+y^2}{1+x^2} > e$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1+y^2 > e + e x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad |y| > \sqrt{e-1+ex^2}$$

Disegno



Osserviamo che $y'(0) = 0$, la soluzione passa per $(0, \sqrt{e-1})$ con derivata nulla.

Osserviamo che $y \equiv -x$ risolve l'equazione differenziale.

Per unicità deduciamo che la soluzione y del PC verifica $y(x) > -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

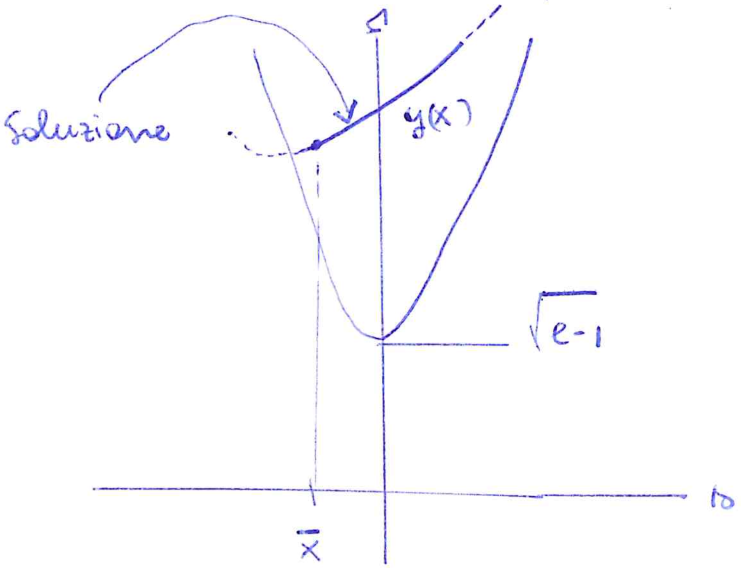
Concludiamo che il grafico di y è tutto contenuto nella regione dove $f < 0$ (salvo $x = 0$).

Quindi la soluzione è sempre decrescente.

Motiviamo meglio questa affermazione:

Quando $x<0$ la soluzione non può entrare nella regione $y > \sqrt{e-1+ex^2} := \varphi(x)$.

Se infatti esistesse $\bar{x}<0$ tale che $y(\bar{x}) > \varphi(\bar{x})$ allora la situazione sarebbe questa:



e non potrebbe essere $y(0) = \sqrt{e-1}$.

I conti mostrano poi che

$$y(0) = \sqrt{e-1}$$
$$y'(0) = 0$$
$$y''(0) = 0 \quad \leftarrow \text{importante}$$
$$(\, y'''(0) \neq 0 \,)$$

Quindi per $x \to 0$ si ha lo sviluppo

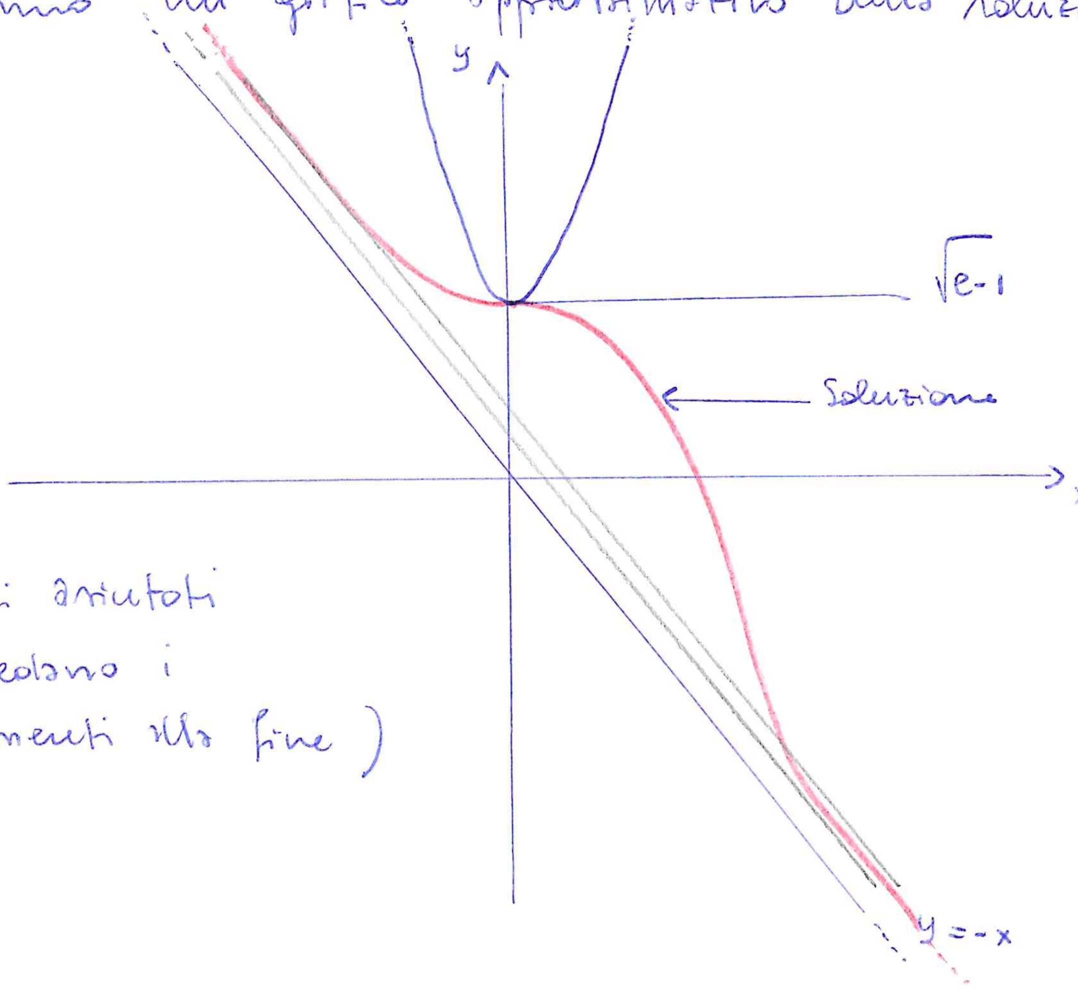
$$y(x) = \sqrt{e-1} + \frac{1}{6} y'''(0)\, x^3 + o(x^3)$$

Mentre

$$\varphi(x) = \sqrt{e-1} + \frac{e}{\sqrt{e-1}} \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

E quindi $y(x) < \varphi(x)$ per $x \in (0, \varepsilon)$ $(\Rightarrow \forall x>0)$.
per monotonia

Tracciamo un grafico approssimativo della soluzione:



(Sugli asintoti si vedano i commenti alla fine)

Proviamo l'esistenza dei limiti $L^{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}$.

Studiamo la derivata

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right) \underbrace{- x - y}_{>0 \text{ sempre}}\right)$$

Per $x<0$ si ha $y(x)^2 > x^2$ e dunque $\log\left(\frac{1+y(x)^2}{1+x^2}\right) > 0$.

Segue che

$$x < 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' < 0 \Rightarrow L^- \text{ esiste (finito o o infinito)}$$

Calcoliamo ora il limite per $x \to -\infty$

$$L^- = \lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} y'(x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{1 + y(x)^2}{1 + x^2}\right) - 1$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 \frac{1 + \overbrace{\frac{1}{y(x)^2}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right) - 1$$

$$= \log\left((L^-)^2\right) - 1$$

dove $L^- \in [-\infty, 0]$. Il caso $L^- = -\infty$ non è possibile. Siccome l'equazione $L = \log L^2 - 1$ ha l'unica soluzione $L = -1$ deve essere:

$$L^- = -1.$$

In modo analogo si mostra che $L^+ = -1$.

Mostriamo infine che y ha asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$. Abbiamo $y + x > 0 \quad \forall x$ e inoltre

$$(y+x)' = \log\left(\frac{1+y^2}{1+x^2}\right)$$

positiva per $x < 0$

negativa per $x > M > 0$

Deduciamo che i limiti

$$q_{-\infty} = \lim_{x \to -\infty} y(x) + x$$

$$q_{\infty} = \lim_{x \to \infty} y(x) + x$$

esistono finiti e non negativi.

É certamente $q_{-\infty} > 0$.

$\square$

Esercizio Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{\sqrt{n} + n x^2}.$$

1) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[1, \infty)$

2) Stabilire se la serie converge uniformemente su $[0, 1]$

Risoluzione. Usiamo il Criterio di Abel-Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{= a_n} \underbrace{\frac{x}{1 + \sqrt{n} x^2}}_{= f_n(x)}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per Leibniz. Proviamo che

$$(*) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$$

$$(**) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty$$

Seguirà che la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Partiamo da $*)$. Si ha $f_n'(x) = \frac{(1+\sqrt{n}x^2) - 2x^2\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^2} =$

$$= \frac{1 - \sqrt{n}\, x^2}{(1 + \sqrt{n}\, x^2)^2}.$$ Dunque $|f_n|$ assume massimo per

$x^2 = 1/\sqrt{n}$ e precisamente $\max_{\mathbb{R}} |f_n| = \frac{1}{2\sqrt[4]{n}} \leq 1$.

Passiamo a (**):

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x}{1+\sqrt{n+1}\,x^2} - \frac{x}{1+\sqrt{n}\,x^2} =$$

$$= x\,\frac{1+\sqrt{n}\,x^2 - (1+\sqrt{n+1}\,x^2)}{(1+\sqrt{n+1}\,x^2)(1+\sqrt{n}\,x^2)}$$

$$= x^3\,\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(1+\sqrt{n+1}\,x^2)(1+\sqrt{n}\,x^2)} = x^3\,\frac{-1}{(1+\sqrt{n+1}\,x^2)(1+\sqrt{n}\,x^2)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

Quindi

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{|x|^3}{2\sqrt{n}\,(1+\sqrt{n}\,x^2)^2} =: g_n(x)$$

Studiamo $g_n(x)$ per $x \geq 0$:

$$g_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{3x^2(1+\sqrt{n}\,x^2)^2 - x^3\,2(1+\sqrt{n}\,x^2)\,2x\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}}\,x^2\,\frac{3(1+\sqrt{n}\,x^2) - 4\sqrt{n}\,x^2}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^3}$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{n}}\,\frac{3-\sqrt{n}\,x^2}{(1+\sqrt{n}\,x^2)^3}$$

Quindi g_n assume massimo per $x^2 = \frac{3}{\sqrt{n}}$.

Quindi

$$\max_{\mathbb{R}} g_n = \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{16}$$

$$= \text{costante} \cdot \frac{1}{n^{5/4}} .$$

Segue che per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} < +\infty .$$

$\square$