Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: 3/9/2020 - Modalità telematica

INSTRUZIONI:
Spedire le soluzioni in bella copia manoscritta e controfirmata in ogni pagina come unico file pdf all'indirizzo monti@math.unipd.it entro le ore 11.00. Estensione del file:

`cognome_nome_matricola.pdf`

Il mancato rispetto di tali regole comporterà l'annullamento della prova.

Esercizio 1 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - x^2y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Disegnare un grafico motivato della soluzione massimale del problema di Cauchy.

ii) Dimostrare che esiste e quindi calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} xy(x).$$

Esercizio 2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \Big(x + \frac{1}{2}\sin y, y + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

---

1 ora e 50 minuti a disposizione + 10 minuti per la consegna del file

ESERCIZIO Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - x^2 y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

i) Disegnare un grafico della soluzione massimale

ii) Provare che esiste e calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to \infty} x\, y(x).$$

Soluzione i) Esistenza locale. La funzione $f = 1 - x^2 y^2$ verifica $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi soddisfa la condizione di Lipschitz. Per il teorema di Cauchy-Lipschitz esiste un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

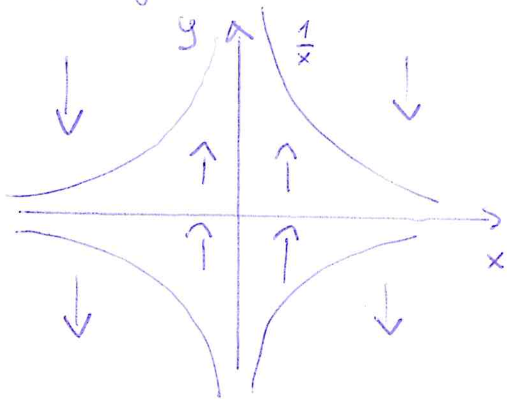
Simmetrie. Sia $z(x) = -y(-x)$. Allora $z(0) = 0$ e

$$z'(x) = +\, y'(-x) = 1 - (-x)^2 (y(-x))^2 = 1 - x^2 z(x)^2.$$

Per unicità della soluzione del PC segue che $z = y$. Quindi y è dispari.

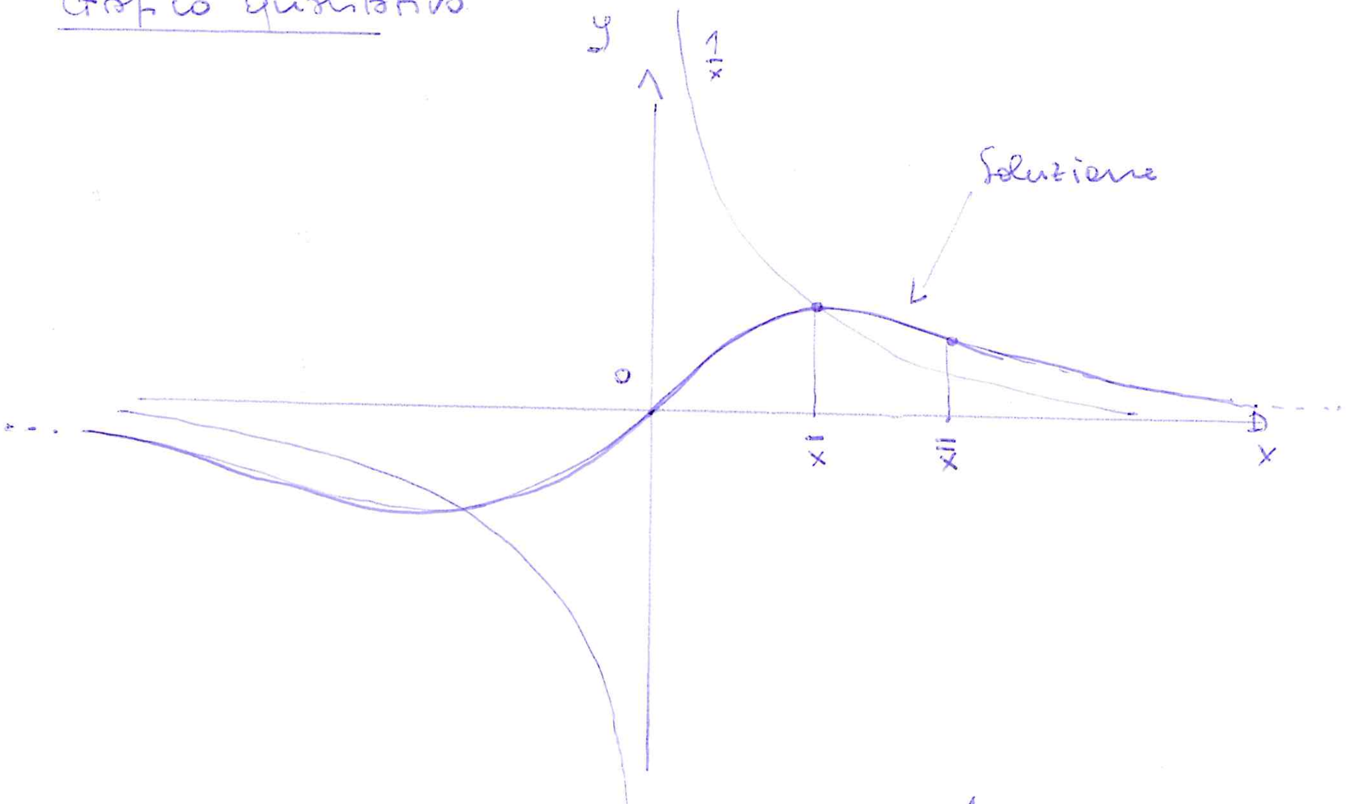
Monotonia. Nella regione dove $f(x,y) > 0$ la soluzione è crescente. Precisamente

$$f > 0 \iff 1 - x^2 y^2 > 0 \iff |y| < \frac{1}{|x|}$$



Siccome $y(0)=0$, y è crescente per x intorno a 0.
Deve per forza entrare nella regione $y > \frac{1}{x}$ con $x>0$
dove la soluzione diventa decrescente. Da questa
regione la soluzione non può più uscire. Dunque
definitivamente per $x \to +\infty$ si ha $y(x) > \frac{1}{x}$.
Questo prova che la soluzione massimale è
definita per $x \in \mathbb{R}$.

<u>Grafico qualitativo</u>



Sia $\bar{x}>0$ il punto in cui $y(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}}$.
Ci aspettiamo l'esistenza di un punto di flesso $\bar{\bar{x}} > \bar{x}$.

Convessità La derivata seconda è

$$y'' = -2xy^2 - 2x^2yy' = -2xy\left(y + xy'\right)$$

$$= -2xy\left(y + x\left(1 - x^2y^2\right)\right) = g(x,y)$$

Studiamo la convessità dove $x>0$. Qui si ha $y>0$.

Dunque, nel 1° quadrante:

$$g(x,y) > 0 \iff y + x(1 - x^2y^2) < 0$$

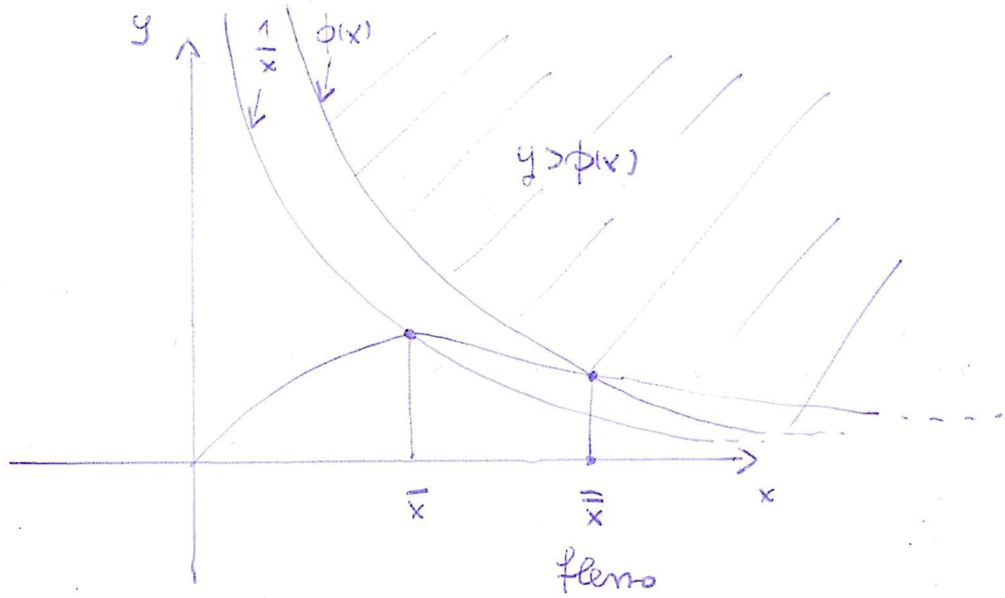
$$\iff x^3y^2 - y - x > 0$$

Risolvendo la disequazione in y per x fissato si trova

$$y > \frac{1 + \sqrt{1+4x^4}}{2x^3} = \phi(x).$$

(Non ci interessa la parte $y < \frac{1}{2x^3}\left(1 - \sqrt{1+4x^4}\right)$.)

Osserviamo che $\phi(x) > \frac{1}{x}$ per $x>0$:



La soluzione deve per forza entrare nella regione dove $y > \phi(x)$. Una volta entrata non può più uscirne. Dunque esiste $\bar{\bar{x}} > \bar{x}$ tale che y è concava su $(0, \bar{\bar{x}})$ e convessa su $(\bar{\bar{x}}, \infty)$.

ii) Per $x > \bar{\bar{x}}$ abbiamo $y''(x) > 0$. Quindi y' è crescente su $(\bar{\bar{x}}, \infty)$. Quindi esiste finito il limite

$$\lim_{x \to \infty} y'(x) = M \leq 0$$

Se fosse $M<0$ si avrebbe $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$, impossibile. Quindi $M=0$.

Di conseguenza

$$\lim_{x \to \infty} x^2 y(x)^2 = 1.$$

Siccome $x y(x) > 0$ per $x > 0$, deduciamo che

$$\lim_{x \to \infty} x y(x) = 1.$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\sin y \, , \; y + \frac{1}{2}\log(1+x^2) \right),$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è 1-1 e su da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Soluzione i) È certamente $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$.

La sua matrice Jacobiana è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos y \\ \frac{x}{1+x^2} & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det JF(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y \cdot \frac{x}{1+x^2}$.

Siccome $|\cos y| \leq 1$ e $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ deduciamo che

$$\det JF(x,y) \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0 .$$

Per il Teorema di invertibilità locale F è un diffeomorfismo locale.

ii) Dati $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ cerchiamo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(x,y) = (\xi, \eta)$, ovvero

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} \sin y = \xi \\ y + \frac{1}{2} \log(1+x^2) = \eta \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \xi - \frac{1}{2} \sin(y) = G_1(x,y) \\ y = \eta - \frac{1}{2} \log(1+x^2) = G_2(x,y) \end{cases}$$

Posto $G = (G_1, G_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ abbiamo l'equazione di punto fisso $G(x,y) = (x,y)$.

Se G è una contrazione esiste un unico punto fisso $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Questo proverebbe che F è 1-1 e su.

Abbiamo:

$$\left| G(x,y) - G(\bar{x},\bar{y}) \right| = \left| \left(\frac{1}{2} \sin(\bar{y}) - \frac{1}{2} \sin(y), \frac{1}{2} \log(1+\bar{x}^2) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right) \right|$$

Per il Teorema di Lagrange

$$\left| \sin(\bar{y}) - \sin(y) \right| \leq |\bar{y} - y| \quad \text{e}$$

$$\left| \log(1+\bar{x}^2) - \log(1+x^2) \right| \leq |\bar{x} - x|$$

Infatti $\| D \log(1+x^2) \|_\infty \leq 1$. Deduciamo che

$$|G(x,y) - G(\bar{x},\bar{y})| \leq \frac{1}{2} \sqrt{|\bar{y}-y|^2 + |\bar{x}-x|^2} =$$

$$= \frac{1}{2} |(x,y) - (\bar{x},\bar{y})| .$$

Dunque G è una contrazione di fattore $\frac{1}{2}$.

$\square$